2008

LaSalleOnLine ENGINYERIES

TEORIA ELECTROMAGNÈTICA

Guia d'estudi

Joan Ramon Regué

LA SALLE
ENGINYERIA I ARQUITECTURA
Universitat Ramon Llull

CRÈDITS

- **Autor:** Joan Ramon Regué
- **Revisors científics:** Miquel Ribó i Lluís Vicent
- **Editor:** Lluís Vicent
- **Coordinació lingüística:** Sara Laso
- **Revisió lingüística:** Mireia Gabernet
- **Maquetació:** Sara Laso
- **Disseny de portada:** Marc Segarra

Aquesta edició ha comptat amb el suport de l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de la Generalitat de Catalunya en la Convocatòria d'ajuts a l'edició i la difusió de llibres de text o manuals universitaris i llibres cientificotècnics, en suport paper o en suport electrònic, escrits en llengua catalana (DILL 2008).

Generalitat de Catalunya
Departament d'Innovació,
Universitats i Empresa
Comissionat per a Universitats
i Recerca

ISBN: 978-84-937011-5-4

ÍNDEX

SESSIÓ 1

- Nom: Sistemes de coordenades i operador gradient
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

OBJECTIUS

En aquesta sessió ens familiaritzarem amb els sistemes de coordenades bàsics que ens permeten representar magnituds vectorials a l'espai i amb un operador matemàtic fonamental per a entendre el formalisme matemàtic que envolta l'electromagnetisme, l'operador gradient.

CONTINGUTS

En aquesta sessió revisarem els tres sistemes de coordenades bàsics que utilitzarem durant el curs: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric. També estudiarem les propietats i el significat de l'operador gradient.

1. Fonaments matemàtics

1.1. Sistemes de coordenades ortogonals

1.1.1. Sistema de coordenades cartesianes

Un sistema de coordenades ens permet identificar punts de l'espai, i orientacions de vectors. Per tant, per a modelar matemàticament qualsevol fenomen físic caldrà establir primer un sistema de coordenades sobre el qual situar tots els elements que hi intervenen.

El sistema de coordenades cartesianes

El sistema de coordenades cartesianes és el sistema de coordenades més intuïtiu que existeix. Situa punts de l'espai en relació a tres eixos ortogonals fixes, i vectors en l'espai descomponent-los en les seves components respecte de tres vectors base unitaris paral·lels als eixos ortogonals. Sobre aquest sistema de coordenades, productes escalars, vectorials, diferencials de volum i de longitud prenen les seves expressions més senzilles.

- *[Cheng1997], pàgines 22 a 28*

1.1.2. Sistema de coordenades cilíndriques

Un altre sistema de coordenades força emprat és el sistema de coordenades cilíndriques, que és útil per tractar de manera senzilla problemes amb simetria de revolució respecte d'un eix.

El sistema de coordenades cilíndriques

El sistema de coordenades cilíndriques, com qualsevol altre sistema de coordenades, permet situar punts de l'espai de manera unívoca i especificar els mòduls, direccions i sentits de magnituds vectorials descomponent-los en les seves components respecte de tres vectors base unitaris que ara, però, dependran del punt de l'espai on es calculin. També ens permet especificar diferencials de longitud i de volum. És important saber deduir la relació entre punts i vectors especificats en sistemes de coordenades cartesianes i cilíndriques.

- *[Cheng1997], pàgines 28 a 33*

1.1.2. Sistema de coordenades esfèriques

El darrer sistema de coordenades que emprarem en aquest curs és el sistema de coordenades esfèriques, útil per tractar de manera senzilla problemes amb simetria esfèrica.

El sistema de coordenades esfèriques

El sistema de coordenades esfèriques és útil per tractar de manera senzilla problemes amb simetria de revolució respecte d'un punt. Com qualsevol altre sistema de coordenades, permet situar punts de l'espai de manera unívoca i especificar els mòduls, direccions i sentits de magnituds vectorials descomponent-los en les seves components respecte de tres vectors base unitaris que ara, però, dependran del punt de l'espai on es calculin. També ens permet especificar diferencials de longitud i de volum. És important saber deduir la relació entre punts i components vectorials especificats en sistemes de coordenades cartesianes i esfèriques.

- *[Cheng1997], pàgines 33 a 38*

1.2. Operadors vectorials

1.2.1. L'operador gradient

Els operadors vectorials permeten expressar de manera compacta relacions diferencials entre magnituds físiques molt complexes. L'operador gradient ens dóna informació sobre la variabilitat d'un camp escalar definit a l'espai i ens permetrà, durant el curs, definir un concepte electromagnètic tant important com és el potencial elèctric, del qual es deriva el concepte de tensió.

Gradient d'un camp escalar

Donat un camp escalar que assigna a un punt de l'espai una determinada magnitud física, l'operador gradient ens indica en quina direcció de l'espai aquesta magnitud varia de manera màxima i, de manera indirecta a través de la seva relació amb la derivada direccional, com varia en qualsevol altra direcció de l'espai. La simbologia de l'operador gradient (∇V) prové de la seva formulació en coordenades cartesianes:

$$\nabla V = \mathbf{a_x}\partial_x V(x,y,z) + \mathbf{a_y}\partial_y V(x,y,z) + \mathbf{a_z}\partial_z V(x,y,z) =$$
$$= \left(\mathbf{a_x}\partial_x + \mathbf{a_y}\partial_y + \mathbf{a_z}\partial_z\right)\cdot V(x,y,z) = \nabla \cdot V(x,y,z)$$

Tot i que s'utilitza la mateixa simbologia en qualsevol altre sistema de coordenades (per a cada nou sistema de coordenades, cal conèixer la fórmula adequada per a calcular l'operador gradient), cal conèixer les fórmules per al gradient en els tres sistemes de coordenades bàsics.

$$\vec{\nabla} f = \hat{x}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi}\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{z}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\cdot\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

- *[Cheng1997], pàgines 39 a 41 i pàgina 474*

RESUM

En aquesta sessió hem recordat alguns temes fonamentals per a abordar de manera rigorosa l'anàlisi del fenomen electromagnètic, com són els sistemes de coordenades bàsics i l'operador gradient.

SESSIÓ 2

- Nom: Els operadors divergència i rotacional
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam estudiar els sistemes de coordenades més importants en l'electromagnetisme i l'operador gradient, que era fruit d'aplicar les derivades espacials a un camp escalar.

OBJECTIUS

En aquesta sessió aplicarem les derivades espacials a un camp vectorial, d'aquí en sortiran dos nous operadors: la divergència i el rotacional. També estudiarem els significats que tenen aquests operadors tan importants en l'electromagnetisme.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran els operadors divergència i rotacional d'un camp vectorial i els seus significats, introduint prèviament els conceptes de flux i circulació.

1.2.2. Divergència d'un camp vectorial

Camp vectorial

Un camp vectorial és una funció que assigna un vector a un punt de l'espai. Per exemple, en coordenades cartesianes, aquest seria un camp vectorial:

$$\mathbf{V}(x,y,z) = V_x(x,y,x)\mathbf{a_x} + V_y(x,y,x)\mathbf{a_y} + V_z(x,y,x)\mathbf{a_z}$$

Línies de flux d'un camp vectorial

Les línies de flux indiquen la direcció del camp en cada punt de l'espai, per tant, el camp en un punt serà tangent a la línia de flux que passa per aquell punt. La magnitud del camp es representa o bé segons la densitat de línies de flux o bé segons la longitud de les línies de flux.

- *[Cheng1997], pàgina 43*

Flux d'un camp vectorial

El flux d'un camp vectorial **A** a través d'una superfície S es defineix com:

$$Flux = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

i indica la intensitat del camp que hi ha perpendicularment a la superfície S. Si la superfície és tancada, llavors definim el flux com:

$$Flux = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

on el vector **s** es pren apuntant cap a l'exterior de la superfície.

- *[Cheng1997], pàgines 43-44*

Divergència d'un camp vectorial

La divergència d'un camp vectorial **A** en un punt és el flux net de sortida de **A** per unitat de volum, quan el volum que envolta el punt tendeix a zero.
La divergència ens indica si en el punt en qüestió hi ha generació o destrucció de camp. Si la divergència neta és positiva indica que en el punt hi ha una font camp, mentre que si la divergència és negativa hi ha un embornal (o font negativa) de camp. Com veurem més endavant, que la divergència valgui zero, no indica forçosament que no hi hagin fonts en aquell punt.
La simbologia de la divergència en coordenades cartesianes és la següent:

$$div\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

com en el cas del gradient l'expressió de la divergència en qualsevol altre sistema de coordenades serà diferent.

$$\vec{\nabla}\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)F_\theta) + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

- *[Cheng1997], pàgines 43-48, pàgines 474-475*

Camp solenoïdal

Un camp solenoïdal és aquell camp vectorial la divergència del qual és igual a zero en tots els punts de l'espai.

- *[Cheng1997], pàgina 48*

1.2.3. Rotacional d'un camp vectorial

En l'apartat anterior hem vist que la divergència ens indicava la presència de fonts de flux, però existeixen un altre tipus de fonts que la divergència és incapaç de detectar: les fonts de vòrtex. Aquest tipus de fonts generen la circulació d'un camp vectorial al seu voltant i poden ser detectades mitjançant el rotacional.

Circulació d'un camp vectorial

La circulació d'un camp vectorial **A** al voltant d'una trajectòria tancada C es defineix com:

$$Circulació = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

i indica el treball que realitzaria el camp **A** en fer circular una partícula unitària sobre la trajectòria tancada C.

- *[Cheng1997], pàgines 52-54*

Rotacional d'un camp vectorial

El rotacional d'un camp vectorial **A** en un punt és un vector la magnitud del qual és la circulació neta màxima d'**A** per unitat de superfície quan la superfície tendeix a zero, i la direcció normal a la superfície quan aquesta està orientada de tal manera que la circulació és màxima.
La simbologia del rotacional en coordenades cartesianes és la següent:

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a_x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{a_y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{a_z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{a_x} & \mathbf{a_y} & \mathbf{a_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Com en el cas del gradient i de la divergència l'expressió del rotacional en qualsevol altre sistema de coordenades serà diferent.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\phi\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{\hat{r}}{r \cdot \sin(\theta)}\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}(F_\phi \sin(\theta)) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\hat{\theta}}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right) + \frac{\hat{\phi}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)$$

- *[Cheng1997], pàgines 54-59, pàgines 474-475*

Camp irrotacional o conservatiu

Un camp irrotacional o conservatiu és aquell camp vectorial el rotacional del qual és igual a zero en tots els punts de l'espai.

- *[Cheng1997], pàgina 59*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat dos operadors: la divergència i el rotacional d'un camp vectorial. Aquests dos operadors ens permetran determinar la generació i destrucció de camp.

SESSIÓ 3

- Nom: Teoremes de l'anàlisi vectorial
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors vam estudiar els operadors vectorials gradients d'un camp escalar i divergència i rotacional d'un camp vectorial.

OBJECTIUS

En aquesta sessió utilitzarem els operadors vectorials per estudiar diversos teoremes i identitats vectorials que ens seran molt útils a l'hora d'analitzar els camps electromagnètics.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran els teoremes de Gauss i de Stokes, així com altres identitats vectorials relacionades amb els operadors vectorials.

1.3. Teoremes de l'anàlisi vectorial

1.3.1. Teorema de Gauss o de la divergència

Teorema de Gauss o de la divergència

El teorema de la divergència, també anomenat teorema de Gauss, diu que la integral de volum de la divergència d'un camp vectorial és igual al flux total del vector a través de la superfície que limita el volum. Expressat matemàticament:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

El teorema de Gauss és molt útil en l'anàlisi vectorial, ja que converteix una integral de volum de la divergència d'un vector en una integral de superfície tancada del vector, i viceversa.

- *[Cheng1997], pàgines 48-52*

1.3.2. Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes diu que la integral de superfície del rotacional d'un camp vectorial sobre una superfície oberta és igual a la integral de línia tancada del vector al llarg del contorn que limita la superfície. Expressat matemàticament:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

El teorema de Stokes converteix una integral de superfície del rotacional d'un vector en una integral de línia, i viceversa.

- *[Cheng1997], pàgines 59-61*

1.3.3. Identitats vectorials

En aquest apartat estudiarem dues identitats molt importants que són fruit de l'aplicació de l'operador nabla, també anomenat operador del, diverses vegades.

Identitat I

Aquesta identitat diu que el rotacional del gradient de qualsevol camp escalar val zero. Matemàticament:

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$$

La versió integral de la igualtat anterior és la següent:

$$\oint_C \nabla V \cdot d\mathbf{l} \equiv 0$$

Com a conseqüència de la igualtat anterior es pot demostrar que si un camp vectorial és conservatiu, llavors existirà un camp escalar, el gradient del qual serà igual al camp vectorial.

$$Si(\nabla \times \mathbf{E} = 0) \Rightarrow \exists V \mid \nabla V = -\mathbf{E}$$

- *[Cheng1997], pàgina 62*

Identitat II

Aquesta identitat diu que la divergència del rotacional de qualsevol camp vectorial val zero. Matemàticament:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

La versió integral de la igualtat anterior és la següent:

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

Com a conseqüència de la igualtat anterior es pot demostrar que si un camp vectorial és solenoïdal, llavors existirà un altre camp vectorial, el rotacional del qual serà igual al primer camp vectorial.

$$Si(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0) \Rightarrow \exists \mathbf{A} \mid \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

- *[Cheng1997], pàgines 63-64*

Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz diu que un camp vectorial està perfectament determinat si coneixem la seva divergència i el seu rotacional en tots els punts de l'espai. Això vol dir que coneixem totes les seves fonts.

- *[Cheng1997], pàgina 65*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat dos teoremes molt importants en l'anàlisi vectorial: els teoremes de Gauss i de Stokes, així com algunes igualtats vectorials també de molta utilitat.

SESSIÓ 4

- Nom: Camps elèctrics estàtics I
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les tres primeres sessions hem estudiat les eines matemàtiques que ens permetran a partir d'ara l'estudi dels camps electromagnètics.

OBJECTIUS

En aquesta sessió s'introduiran els camps elèctrics estàtics, començant per les lleis fonamentals de l'electrostàtica, de les quals en sessions posterior podrem extreure'n el comportament d'aquest tipus de camps.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà el concepte d'intensitat de camp elèctric i les lleis generals del camp electrostàtic, tant en forma diferencial com en forma integral.

2. Camps elèctrics i magnètics estàtics

2.1. Camps elèctrics estàtics

2.1.1. Introducció als camps elèctrics estàtics

Introducció als camps elèctrics estàtics

La electrostàtica és l'estudi dels efectes de les càrregues elèctriques en repòs i dels camps elèctrics que no canviem amb el temps.
L'efecte dels camps elèctrics estàtics és present en la vida quotidiana, per exemple quan salta una guspira en baixar del cotxe i tocar el metall de la porta, o quan ens traiem algunes peces de roba. Aquest efecte va ser estudiat per Charles Augustin Coulomb a finals del segle XVIII, arribant a la famosa llei de Coulomb.

- *[Cheng1997], pàgines 72-73*

2.1.2. Lleis generals del camp electrostàtic

Intensitat de camp elèctric

La intensitat de camp elèctric és la força **F** per unitat de càrrega que experimenta una càrrega *q* de prova estacionària molt petita al col·locar-se en una regió on hi ha un camp elèctric **E**.

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

- *[Cheng1997], pàgina 74*

Desplaçament elèctric

El desplaçament elèctric o densitat de flux elèctric **D** és el producte del camp elèctric **E** en un punt per la permitivitat ε en el mateix punt.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$$

Lleis generals del camp elèctric en forma diferencial

Els dos principis bàsics de l'electrostàtica especifiquen la divergència i el rotacional del camp elèctric **E**. Aquests dos principis en l'espai lliure s'expressen de la següent manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_o}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

L'equació del rotacional indica que el camp electrostàtic és conservatiu o irrotacional. Mentre que la llei de la divergència del camp elèctric ens indica la relació que existeix entre el camp elèctric i la densitat volumètrica de càrrega ρv. Aquestes dues lleis ens serviran per trobar les altres lleis de l'electrostàtica.

- *[Cheng1997], pàgines 74-75*

Lleis generals del camp elèctric en forma integral

Per a resoldre determinats problemes ens interessa tenir les relacions anteriors expressades en forma integral. Aquestes són:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

La primera relació és l'anomenada Llei de Gauss, que estudiarem més endavant, i la segona ens diu que la circulació del camp elèctric estàtic al llarg d'una trajectòria tancada és zero.

- *[Cheng1997], pàgines 75-76*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les lleis generals del camp electrostàtic, aquestes lleis tenen dues versions: la diferencial i la integral. A partir d'aquestes llei podrem deduir totes les altres lleis de l'electrostàtica.

SESSIÓ 5

- Nom: Camps elèctrics estàtics II
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam fer una introducció al camp elèctric estàtic i vam enunciar les lleis generals del camp electrostàtic.

OBJECTIUS

A partir de les lleis generals del camp electrostàtic, en aquesta sessió deduirem la llei de Coulomb, estudiarem les aplicacions que aquesta té i finalment analitzarem la llei de Gauss.

CONTINGUTS

Deduirem la llei de Coulomb de les lleis generals del camp electrostàtic i a partir d'aquesta llei s'estudiarà la manera de determinar el camp generat per distribucions de càrregues. Finalment estudiarem la llei de Gauss.

2.1.3. La llei de Coulomb

Deducció de la llei de Coulomb a partir de la de Gauss

A partir de la llei de Gauss exposada anteriorment, i suposant una càrrega puntual, q, es pot arribar a trobar el camp elèctric generat per aquesta càrrega en qualsevol punt de l'espai:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a_R}$$

on R és la distancia entre la càrrega i el punt on volem calcular el camp i $\mathbf{a_R}$ un vector unitari en la direcció de la recta que uneix aquests punts. A partir del camp elèctric podrem trobar fàcilment la força entre dues càrregues utilitzant la pròpia definició d'intensitat de camp elèctric.

- *[Cheng1997], pàgines 76-78*

La llei de Coulomb

La força entre dues càrregues puntuals és proporcional al producte de les càrregues i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa.

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_\mathbf{R}$$

Cal fixar-se que quan les càrregues són de la mateixa polaritat, la força és repulsiva, i quan són de polaritat inversa, la força és atractiva.

- *[Cheng1997], pàgines 79-80*

2.1.4. Camp elèctric generat per distribucions de càrregues

Camp elèctric generat per un sistema de càrregues discretes

Donat que el camp elèctric és una funció lineal, podem trobar el camp elèctric en un punt a partir de la suma dels camps generats per cadascuna de les càrregues:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k\left(\mathbf{R}-\mathbf{R}_\mathbf{k}'\right)}{\left|\mathbf{R}-\mathbf{R}_\mathbf{k}'\right|^3}$$

- *[Cheng1997], pàgina 81*

Camp elèctric generat per una distribució contínua de càrrega

Igual que en el cas de càrregues discretes, podem trobar el camp generat per una distribució contínua de càrrega. En aquest cas però, haurem d'integrar la distribució de càrrega. Pel cas d'una distribució amb una densitat volumètrica de càrrega ρ_v :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\mathbf{a}_\mathbf{R}\frac{\rho_v}{R^2}dv'$$

Pel cas d'una distribució amb una densitat superficial de càrrega ρ_s :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{S'}\mathbf{a}_\mathbf{R}\frac{\rho_s}{R^2}ds'$$

Pel cas d'una distribució amb una densitat lineal de càrrega ρ_l :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{L'} \mathbf{a_R}\frac{\rho_l}{R^2}\,dl'$$

- *[Cheng1997], pàgines 81-84*

2.1.5. La llei de Gauss

La llei de Gauss

La llei de Gauss diu que el flux de sortida total del camp E a través de qualsevol superfície tancada és igual a la càrrega total tancada per la superfície dividida per la permitivitat.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

La llei de Gauss és molt útil per calcular el camp elèctric de distribucions de càrrega que siguin fàcilment integrables en una superfície que s'anomena superfície gaussiana.

- *[Cheng1997], pàgines 85-90*

RESUM

En aquesta sessió hem deduït i estudiat la llei de Coulomb. Després hem generalitzat aquesta llei pel cas de diverses distribucions de càrregues i finalment hem estudiat la llei de Gauss.

SESSIÓ 6

- Nom: Potencial electrostàtic
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anterior hem estudiat les lleis generals dels camps elèctrics estàtics, de les quals vam deduir la llei de Coulomb, útil per calcular la força entre dues càrregues.

OBJECTIUS

En aquesta sessió definirem el concepte de potencial electrostàtic, que com veurem està relacionat amb el camp elèctric a través del gradient. El potencial electrostàtic permetrà una visió alternativa del camp elèctric, basada en un camp escalar.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà el concepte de potencial electrostàtic, el potencial electrostàtic generat per distribucions de càrregues, i finalment les equacions de Poisson i Laplace, que són les que regeixen el potencial electrostàtic.

2.2. Potencial electrostàtic

2.2.1. Definició del potencial electrostàtic

Definició de potencial electrostàtic

El camp electrostàtic és irrotacional, per tant podem definir un escalar anomenat potencial electrostàtic, V, el gradient del qual sigui igual al camp elèctric.

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Normalment treballar amb escalars és més fàcil que amb vectors, per tant si volem trobar el camp elèctric, primer podem buscar el potencial, i derivant podrem trobar el camp.

- *[Cheng1997], pàgina 90*

Diferència de potencial a partir del camp electrostàtic

La diferència de potencial entre dos punts està relacionada amb el treball necessari per moure una carrega sotmesa a un camp elèctric entre els dos punts. La diferència de potencial entre dos punts la podem expressar de la següent manera:

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Per conèixer el potencial en un punt, necessitem un potencial de referència. Normalment utilitzem com a referència un potencial zero a l'infinit.
Les superfícies equipotencials són perpendiculars a les línies de camp, ja que el gradient és perpendicular a les superfícies equipotencials.

- *[Cheng1997], pàgines 91-92*

2.2.2. Potencial elèctric degut a distribucions de càrregues

Potencial elèctric generat per una càrrega puntual

Aplicant la integral que ens dona la diferència de potencial entre dos punts, i considerant el potencial zero a l'infinit, obtenim que una càrrega puntual, q, a una distància, R, genera un potencial:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

- *[Cheng1997], pàgines 92-93*

Potencial elèctric generat per un sistema de càrregues discretes

Aplicant superposició en el cas anterior:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k|}$$

- *[Cheng1997], pàgina 93*

Potencial elèctric generat per una distribució contínua de càrrega

Igualment que en el cas de càrregues discretes podem trobar el potencial generat per una distribució contínua de càrrega, en aquest cas però, haurem d'integrar la distribució de càrrega. Pel cas d'una distribució amb una densitat volumètrica de càrrega ρ_v:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\frac{\rho_v}{R}dv'$$

Pel cas d'una distribució amb una densitat superficial de càrrega ρ_s :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{S'}\frac{\rho_s}{R}ds'$$

Pel cas d'una distribució amb una densitat lineal de càrrega ρ_l:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{L'}\frac{\rho_l}{R}dl'$$

- *[Cheng1997], pàgina 95*

2.2.3. Les equacions de Poisson i Laplace

L'equació de Poisson

A partir de l'equació de la divergència del camp electrostàtic i de la definició de potencial elèctric, es pot arribar a l'equació que governa el potencial electrostàtic en qualsevol punt de l'espai. Aquesta equació s'anomena equació de Poisson.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

L'operador, ∇^2 (nabla quadrat o del quadrat), s'anomena operador laplacià i es pot interpretar com la divergència del gradient.

- *[Cheng1997], pàgines 129-130*

L’equació de Laplace

Si el medi en que calculem el potencial està lliure de càrregues, l’equació anterior es transforma en l’equació de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

- *[Cheng1997], pàgina 130*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat els principis bàsics del camp electrostàtic, dels quals hem deduït la llei de Coulomb. També hem generalitzat la llei de Coulomb pel cas de diverses distribucions de càrregues i finalment hem estudiat la llei de Gauss.

SESSIÓ 7

- Nom: Camps electrostàtics en medis materials
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem vist les lleis que regeixen els camps elèctrics estàtics i hem definit el concepte de potencial electrostàtic, que està relacionat amb el camp elèctric a través del gradient.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem el comportament dels camps elèctrics estàtics en medis materials, és a dir diferents de l'espai buit.

CONTINGUTS

Aquesta sessió versarà sobre el comportament dels camps electrostàtics en dos tipus de medis materials: els conductors perfectes i la separació entre dos medis dielèctrics.

2.3. Camps electrostàtics en medis materials

2.3.1. Els medis materials

Conductors, dielèctrics i semiconductors

Els materials es poden classificar, des d'un punt de vista elèctric, en tres tipus: conductors, dielèctrics i semiconductors.
En els conductors, els electrons de les capes externes dels àtoms estan units molt dèbilment, permetent una mobilitat dels electrons entre àtoms. El tipus més habitual de conductors són els metalls.
En els materials dielèctrics els electrons estan lligats molt fortament als àtoms, de manera que no és possible l'intercanvi d'electrons entre àtoms.
Els semiconductors són un cas intermedi entre conductors i dielèctrics.

- *[Cheng1997], pàgines 97-98*

2.3.2. Camps electrostàtics en conductors perfectes

Camp elèctric a l'interior d'un conductor perfecte

Donat que un conductor té una gran quantitat de càrregues lliures, aquestes es mouran per compensar qualsevol variació de càrrega en l'interior del conductor, desplaçant-la cap a la superfície del conductor. Per tant la càrrega i el camp a l'interior del conductor en règim estacionari seran sempre nuls.

$$\rho_v = 0$$
$$\mathbf{E} = 0$$

- *[Cheng1997], pàgina 98*

Camp elèctric en la superfície d'un conductor perfecte

El camp elèctric en la superfície d'un conductor hi ha de ser normal, ja que si no ho fos hi hauria moviment de càrregues, cosa que contradiu els principis de l'electrostàtica. Aplicant la llei de Gauss a la superfície del conductor podem arribar a la següent conclusió: la component normal del camp elèctric en la superfície d'un conductor és igual a la densitat superficial de càrrega dividida per la permitivitat.

$$\mathbf{E_t} = 0$$
$$\mathbf{E}_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}$$

- *[Cheng1997], pàgines 98-102*

Potencial electrostàtic en conductors

La superfície del conductor és equipotencial, ja que el camp elèctric és normal a la superfície. També, tenint en compte que el camp a l'interior dels conductors és nul, el gradient del potencial a l'interior del conductor serà nul. Per tant tots els punts d'un conductor es troben al mateix potencial electrostàtic.

- *[Cheng1997], pàgines 98-102*

2.3.3. Camps elèctrics estàtics en la separació entre dos medis dielèctrics

Camps electrostàtics en la separació de dos dielèctrics

Utilitzant la propietat que diu que el camp electrostàtic és irrotacional, podem deduir que la component tangencial d'un camp electrostàtic és continua en la interfície de dos dielèctrics.
D'altra banda, aplicant el teorema de Gauss a un volum molt petit que conté la interfície entre els dos dielèctrics i si suposem que no hi ha càrrega aquesta interfície, podem arribar a la conclusió que la component normal del vector desplaçament és contínua. Per tant:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$$
$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 \mathbf{E}_{1n} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{2n}$$

- *[Cheng1997], pàgines 111-115*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el comportament dels camps elèctrics en els medis materials. Primerament hem analitzat el cas d'un material conductor i finalment el cas de la separació entre dos medis dielèctrics.

SESSIÓ 8

- Nom: Camps magnètics estàtics
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat els camps elèctrics estàtics i les eines que ens permeten treballar amb ells.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduirem els conceptes bàsics dels camps magnètics estàtics.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les característiques dels corrents elèctrics, la llei de Lorentz, que ens dóna la força que el camp magnètic exerceix sobre una càrrega i les lleis fonamentals de la magnetostàtica, tant en forma diferencial com en forma integral.

2.4. Camps magnètics estàtics

2.4.1. Corrents elèctrics estacionaris

Densitat de corrent

Els corrents elèctrics són generats pel moviment de càrregues ja sigui en el buit o en un medi material. Si les càrregues es mouen en el buit, parlem de corrent de convecció, metre que si les càrregues es mouen en un medi material, el corrent s'anomena de conducció.
El corrent que flueix per una determinada superfície degut a una densitat de corrent, **J**, es pot expressar de la següent forma:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Pel cas del corrent de conducció (el més habitual), la densitat de corrent ve donada per la següent equació:

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{u_i}$$

on N_i és el nombre de càrregues, q_i el valor de la càrrega i u_i la velocitat amb què es mou la càrrega.

- *[Cheng1997], pàgines 151-154*

Equació de continuïtat de la càrrega

El principi de continuïtat de la càrrega estableix que les càrregues elèctriques ni es creen ni es destrueixen. Per tant si d'un volum de l'espai en surt un corrent, la quantitat de càrregues en aquest volum ha de disminuir. Aquest principi es pot expressar de la següent manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

- *[Cheng1997], pàgines 157-158*

Corrents elèctrics estàtics

Una hipòtesi bàsica de la magnetostàtica és que en qualsevol punt de l'espai sempre hi ha el mateix corrent, per tant no hi pot haver disminució de càrrega en cap punt de l'espai. Partint de l'equació de conservació de la càrrega obtenim:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Aquesta equació ens indica que el corrent elèctric estacionari és solenoïdal.

- *[Cheng1997], pàgina 158*

2.4.2. La llei de Lorentz

La llei de Lorentz

La força magnètica que experimenta una càrrega, q, que es mou a una velocitat **u**, i que està sotmesa a una densitat de flux de camp magnètic, **B**, ve expressada per la llei de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Aquesta llei es va establir experimentalment a l'observar que un filament amb corrent exercia una força sobre una càrrega que no podia ser explicada per les lleis de l'electrostàtica.

- *[Cheng1997], pàgines 171-172*

Intensitat de camp magnètic

La densitat de flux magnètic o inducció magnètica és igual al producte de la permeabilitat magnètica, μ, per la intensitat de camp magnètic, **H,** en el mateix punt.

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$$

La majoria dels materials (si exceptuem el níquel, el cobalt, el ferro i els seus derivats) no tenen propietats magnètiques, per tant tenen una permeabilitat igual a la del buit, μo.

2.4.3. Lleis fonamentals de la magnetostàtica

Lleis generals de la magnetostàtica en forma diferencial

A l'igual que en el cas del camp elèctric estàtic, les dues lleis fonamentals de la magnetostàtica especifiquen la divergència i el rotacional, en aquest cas del vector de densitat de flux magnètic, **B**. Aquests dos principis en un medi no magnètic s'expressen de la següent manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}$$

Aquestes dues equacions ens indiquen que només hi ha fonts de camp magnetostàtic en els punts on hi ha corrent, i que donat que el camp magnètic estàtic és solenoïdal, aquest tendeix a fer girar càrregues.

- *[Cheng1997], pàgina 172*

Coherència de les equacions del camp magnetostàtic amb les del corrent magnetostàtic

Si calculem la divergència de la segona llei de la magnetostàtica:

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \mu_o \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \mathbf{J} = 0$$

Per tant ambdós conjunts d'equacions són coherents.

- *[Cheng1997], pàgina 173*

Lleis generals del camp magnètic estàtic en forma integral

Aplicant el teorema de la divergència i el de Stokes respectivament a les equacions en forma integral, obtenim:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I$$

La primera llei és la llei de conservació del flux magnètic i diu que les línies de flux magnètic sempre es tanquen sobre elles mateixes.
La segona llei és l'anomenada llei circuital d'Ampère: la circulació de la densitat de flux magnètic al voltant d'una trajectòria tancada és igual a la permeabilitat pel corrent total que flueix a través de la superfície limitada per la trajectòria.

- *[Cheng1997], pàgines 173-175*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat els principis bàsics del camp electrostàtic, dels quals hem deduït la llei de Coulomb. També hem generalitzat la llei de Coulomb pel cas de diverses distribucions de càrregues i finalment hem estudiat la llei de Gauss.

SESSIÓ 9

- Nom: Les equacions de Maxwell
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat els camps elèctrics i magnètics estàtics. Aquests camps no tenien dependència temporal i eren independents l'un de l'altre.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduirem les equacions de Maxwell que integren els camps elèctrics i magnètics en un camp anomenat electromagnètic.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les lleis de Maxwell en les seves dues vessants, la versió diferencial i la versió integral. També veurem la força que exerceix un camp electromagnètic sobre una càrrega en moviment.

3. Les equacions de Maxwell

3.1. Les equacions de Maxwell en forma diferencial

3.1.1. Les equacions de Maxwell en forma diferencial

Equacions de Maxwell en forma diferencial

Les equacions de Maxwell descriuen de manera macroscòpica el funcionament de qualsevol sistema electromagnètic. Aquestes equacions estan fonamentades en les equacions de la divergència i del rotacional dels camps elèctrics i magnètics estàtics.

$$\nabla \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

on

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Podem observar que les equacions de la divergència són idèntiques a les dels camps estàtics, però les del rotacional tenen un terme afegit. El terme $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ prové del fet experimental que un camp magnètic variable amb el temps genera un camp elèctric. La densitat de corrent de desplaçament $(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$ va ser introduïda per Maxwell per fer que les equacions fossin coherents amb el principi de continuïtat de càrrega, que tal com vam veure és:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Aquestes equacions ens diuen que:

- En qualsevol punt de l'espai es genera camp elèctric si:
  - Hi ha càrrega en aquell punt
  - Hi ha disminució temporal de camp magnètic
- En qualsevol punt de l'espai es genera camp magnètic si:
  - Hi ha corrent elèctric en aquell punt
  - Hi ha un augment temporal de camp elèctric

- *[Cheng1997], pàgines 243-245*

3.2. Les equacions de Maxwell en forma integral

3.2.1. Les equacions de Maxwell en forma integral

Aplicant el teorema de Gauss a les expressions que contenen divergències i el teorema de Stokes a les que contenen rotacionals, ens queden les expressions integrals de les equacions de Maxwell:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\mathbf{s}$$
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot dl = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} d\mathbf{s}$$

L'equació de continuïtat de càrrega en forma integral queda:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ_{IN}}{dt}$$

- *[Cheng1997], pàgines 245-246*

3.3. Força sobre una partícula sotmesa a un camp electromagnètic

3.3.1. Força sobre una partícula sotmesa a un camp electromagnètic

Una partícula de càrrega, q, que es mou a una velocitat, **u**, sotmesa a un camp electromagnètic, **E** i **H**, sofreix una força:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Aquesta relació s'anomena equació de la força de Lorentz.

- *[Cheng1997], pàgina 171*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les equacions de Maxwell, tant en forma diferencial com en forma integral. Aquestes equacions són les que regeixen el comportament dels camps electromagnètics i s'obtenen a partir de les equacions dels camps elèctrics i magnètics estàtics. També hem estudiat la força que exerceix un camp electromagnètic sobre una partícula carregada.

SESSIÓ 10

- Nom: Condicions de contorn
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam estudiar les equacions de Maxwell que regeixen el comportament de tots els camps electromagnètics.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem com es comporten els camps electromagnètics en la frontera de dos medis materials diferents.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà el comportament dels camps electromagnètics quan passen d'un dielèctric a un altre i quan passen d'un medi dielèctric a un conductor perfecte.

3.4. Condicions de contorn generalitzades en la separació de dos medis materials

3.4.1. Condicions de contorn generalitzades en la separació de dos medis materials

Considerarem el cas de dos medis materials arbitraris caracteritzats per les seves constants dielèctriques i magnètiques ε i μ. En la interfície d'aquests medis hi ha un corrent lliure superficial J_s i una distribució de càrrega lliure ρs.

Aquestes hipòtesis són vàlides per a qualsevol tipus d'interfície i en qualsevol instant de temps.

Utilitzant el mateix mètode que vam utilitzar per deduir les condicions de contorn en els camps elèctrics estàtics, és a dir utilitzant la forma integral de l'equació del rotacional pel cas de les components tangencials i la forma integral de l'equació de la divergència pel cas de les components normals obtenim que:

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$\mathbf{a_n} \times (\mathbf{H_1} - \mathbf{H_2}) = \mathbf{J_s}$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$
$$B_{1n} = B_{2n}$$

A continuació estudiarem els dos casos més habituals de condicions de contorn.

- *[Cheng1997], pàgina 248*

Condicions de contorn en la separació de dos medis dielèctrics

En el cas de la separació entre dos medi dielèctrics sense pèrdues que no tinguin acumulació de càrrega ni corrents superficials, les equacions anteriors queden:

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$
$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$
$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$
$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

- *[Cheng1997], pàgina 249*

Condicions de contorn en la separació entre un medi dielèctric i un medi conductor perfecte

En els conductors perfectes, els camps electromagnètics variables amb el temps són nuls en el seu interior $(E_{2t} = 0;\, D_{2n} = 0;\, H_{2t} = 0;\, B_{2n} = 0)$ i qualsevol càrrega o corrent variables en el temps estan sobre la superfície del conductor. Sabent això podem deduir les condicions de contorn en el medi dielèctric:

$$E_{1t} = 0$$
$$D_{1n} = \rho_s$$
$$\mathbf{a_{2n}} \times \mathbf{H_1} = \mathbf{J_s}$$
$$B_{1n} = 0$$

- *[Cheng1997], pàgines 249-250*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les condicions de contorn, primer en un cas genèric i després les hem particularitzat pel cas d'una separació entre dos dielèctrics i pel cas d'una separació entre un dielèctric i un conductor.

SESSIÓ 11

- Nom: Camps amb dependència harmònica amb el temps
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors vam estudiar les equacions de Maxwell que regeixen el comportament de tots els camps electromagnètics i les condicions de contorn que es compleixen en la frontera de dos medis materials.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem els camps electromagnètics que tenen una dependència harmònica amb el temps, és a dir, que estan en règim permanent sinusoïdal.

CONTINGUTS

En aquesta sessió definirem els conceptes de règim permanent sinusoïdal i fasor, i finalment deduirem les expressions de les equacions de Maxwell pel cas de règim permanent sinusoïdal.

3.5. Règim permanent sinusoïdal

3.5.1. Règim permanent sinusoïdal i fasors

Règim permanent sinusoïdal

De totes les possibles dependències temporals que pugin presentar els camps electromagnètics, per la seva simplicitat i utilitat, a nosaltres només ens interessa la dependència sinusoïdal del temps un cop assolit el règim estacionari.
Aquesta dependència és la que anomenem règim permanent sinusoïdal, i les hipòtesis de partida són les següents:

- Totes les excitacions del sistema són sinusoïdals i a la mateixa freqüència.
- Qualsevol règim transitori ja ha desaparegut, per tant els valors de camp es van repetint periòdicament.
- Com a conseqüència de tot això, qualsevol camp que tingui el nostre sistema també dependrà del temps sinusoïdalment.

- *[Cheng1997], pàgina 248*

Fasors

En les condicions anteriors, un camp tindria la següent forma:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})\cos(\omega_o t + \phi(\mathbf{r}))\cdot \mathbf{a}$$

on **x** és un vector de components reals, A és l'amplitud de l'oscil·lació i φ és la fase inicial.
El que fa un fasor és representar aquestes variables a través d'un terme complex que no inclogui la informació sinusoïdal. Aquest terme l'anomenarem fasor **X** de la variable vectorial **x**:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})\cdot\mathbf{a}\cdot\cos(\omega_o t + \phi(\mathbf{r})) \Rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\cdot\mathbf{a}\cdot e^{j\phi(\mathbf{r})}$$

Un cop tenim el fasor ja podem operar amb ell, un cop haguem arribat a la solució del problema podem recuperar la informació amb dependència temporal de la següent manera:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r},t) = \Re\left[\mathbf{X}(\mathbf{r})\cdot e^{j\omega_o t}\right]$$

- *[Cheng1997], pàgina 259*

Propietats dels fasors

Per operar amb fasors necessitem conèixer les seves propietats. Una de les més importants per l'electromagnetisme és la de la derivada, ja que aquesta apareix en les equacions de Maxwell.

$$\begin{array}{lll}
Si\ \mathbf{x}(\mathbf{r},t) = \mathbf{y}(\mathbf{r},t) & \rightarrow & \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \mathbf{Y}(\mathbf{r}) \\
Si\ \mathbf{z}(\mathbf{r},t) = \mathbf{x}(\mathbf{r},t) + \mathbf{y}(\mathbf{r},t) & \rightarrow & \mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \mathbf{X}(\mathbf{r}) + \mathbf{Y}(\mathbf{r}) \\
Si\ \mathbf{y}(\mathbf{r},t) = \dfrac{\partial}{\partial \text{espaial}}\mathbf{x}(\mathbf{r},t) & \rightarrow & \mathbf{Y}(\mathbf{r}) = \dfrac{\partial}{\partial \text{espaial}}\mathbf{X}(\mathbf{r}) \\
Si\ \mathbf{y}(\mathbf{r},t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{r},t) & \rightarrow & \mathbf{Y}(\mathbf{r}) = j\omega\cdot\mathbf{X}(\mathbf{r}) \\
Si\ \mathbf{x}(\mathbf{r},t) = \mathbf{y}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{n} & \rightarrow & \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \mathbf{Y}(\mathbf{r})\times\mathbf{n} \\
Si\ \mathbf{x}(\mathbf{r},t) = \mathbf{y}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n} & \rightarrow & \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \mathbf{Y}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}
\end{array}$$

3.5.2. Expressions fasorials de les equacions de Maxwell en règim permanent sinusoïdal

Suposem que estem en un sistema en que totes les excitacions i respostes tenen dependència harmònica amb el temps, per tant que estem en règim permanent sinusoïdal. Llavors, aplicant les propietats dels fasors que hem definit anteriorment, podem expressar les equacions de Maxwell de la següent manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v / \varepsilon$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\,\mathrm{j}\omega\omega\,\mathbf{H}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega\omega\mathbf{E}$$

L'equació de continuïtat de càrrega ens queda:

$$\nabla \cdot J = -\,\mathrm{j}\omega\,\rho_{\mathrm{v}}$$

Pel que fa a les condicions de contorn, aquestes queden iguals que el cas general.

- *[Cheng1997], pàgines 259-260*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les condicions de contorn, primer en un cas genèric i després les hem particularitzat pel cas d'una separació entre dos dielèctrics i pel cas d'una separació entre un dielèctric i un conductor.

SESSIÓ 12

- Nom: L'equació d'ona
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En el capítol anterior vam estudiar les equacions de Maxwell, que eren les que governaven qualsevol sistema des del punt de vista electromagnètic.

OBJECTIUS

En aquesta sessió deduirem l'equació d'ona a partir de les equacions de Maxwell, d'aquesta manera obtindrem una equació tancada capaç de determinar els camps en llocs lliures de fonts.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les equacions d'ona (l'equació del camp elèctric i la del camp magnètic), també veurem les seves versions fasorials, i finalment definirem el concepte d'ona plana.

4. Ones electromagnètiques als medis materials

4.1. L'equació d'ona

4.1.1 Les equacions d'ona

Les equacions d'ona ens donen la relació que han de complir la intensitat de camp elèctric o la intensitat de camp magnètic en un medi no conductor i lliure de fonts.
Aquestes equacions s'obtenen a partir de les equacions de Maxwell, que són equacions en derivades primeres i que depenen simultàniament del camp elèctric i magnètic. Les equacions d'ona són equacions en derivades segones i que depenen només d'un dels dos camps.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Es defineix la velocitat de propagació de l'ona com:

$$u_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Tot i que aquestes equacions només depenguin d'un tipus de camp, podrem trobar l'altre a partir d'aquest. Aquestes equacions són només vàlides per zones lliures de fonts, per tant el camp haurà d'estar originat per unes condicions de contorn en el límit de la zona que s'estudiï amb aquestes equacions.

- *[Cheng1997], pàgines 263-264*

Les equacions fasorials d'ona

A partir de les equacions d'ona podem deduir la versió fasorial per al seu règim permanent sinusoïdal:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{E}_s = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s + \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{H}_s = 0$$

Es defineix el nombre d'ona com:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

- *[Cheng1997], pàgines 264-265*

Ona plana

Una ona plana és una solució particular de les equacions de Maxwell en la que el camp elèctric o magnètic té la mateixa direcció, magnitud i fase en plans infinits perpendiculars a la direcció de propagació.

- *[Cheng1997], pàgina 273*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les diferents versions de l'equació d'ona (la de camp elèctric i la de camp magnètic), així com les seves versions fasorials. Finalment hem definit el concepte d'ona plana que utilitzarem duran la resta del capítol.

SESSIÓ 13

- Nom: Ones planes en medis sense pèrdues
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem estudiar l'equació d'ona, que s'obtenia de les equacions de Maxwell i que serveix per determinar el comportament electromagnètic en zones lliures de fonts.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem una solució de l'equació d'ona: l'ona plana en un medi sense pèrdues.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà l'ona plana i les seves principals característiques, com són: la velocitat de propagació, la impedància intrínseca del medi i el nombre d'ona.

4.2. Ones planes

4.2.1. Ones planes en medis sense pèrdues

Estudiarem el cas d'una ona plana uniforme en la qual el seu camp elèctric té la direcció de l'eix de les x i és constant en els plans perpendiculars a l'eix z. Aquesta ona representada en forma fasorial té la següent expressió:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_\mathbf{x} E_0^+ \cdot e^{-jkz} + \mathbf{a}_\mathbf{x} E_0^- \cdot e^{jkz}$$

El primer sumand representa una ona que viatja en la direcció z, mentre que el segon sumand representa una ona viatjant en la direcció –z. Si convertim l'expressió anterior en temporal, tenim:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_\mathbf{x} E_0^+ \cdot \cos(\omega t - kz) + \mathbf{a}_\mathbf{x} E_0^- \cdot \cos(\omega t + kz)$$

La velocitat de fase és la velocitat de propagació d'un front d'ona de fase constant, i ve donada per:

$$u_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

La relació entre el nombre d'ona i la longitud d'ona és la següent:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Aplicant les equacions de Maxwell es pot trobar el camp magnètic associat a aquesta ona:

$$H(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_0^+}{\eta} \cdot e^{-jkz} + \mathbf{a}_y \frac{E_0^-}{\eta} \cdot e^{jkz}$$

D'aquí es pot extreure el concepte d'impedància intrínseca del medi, que és la relació entre el camp magnètic i el camp elèctric d'una ona.

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Pel cas de l'espai buit, la impedància intrínseca del medi val 120 π o 377 ohms.

- *[Cheng1997], pàgines 273-279*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les ones planes en medis sense pèrdues. També hem vist que la velocitat de propagació, el nombre d'ona i la impedància intrínseca del medi eren les seves principals característiques.

SESSIÓ 14

- Nom: Ones transversals electromagnètiques
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat l'equació d'ona i una solució seva, que és l'ona plana en un medi sense pèrdues.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem les ones transversals electromagnètiques, que com veurem són ones planes que es propaguen en qualsevol direcció de l'espai.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les ones transversals electromagnètiques i la relació que tenen en elles el camp elèctric, el camp magnètic i el vector de propagació.

4.2.2. Ones transversals electromagnètiques

Estudiem ara el cas d'una ona plana que es propaga en qualsevol direcció de l'espai, aquesta complirà la següent equació d'ona:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{a}_\mathbf{e} E_0 \cdot e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{a}_\mathbf{h} H_0 \cdot e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

on

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{a}_\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} = \mathbf{a}_\mathbf{e} \times \mathbf{a}_\mathbf{h}$$

$$\mathbf{a}_\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_\mathbf{h} = 0$$

$$\eta = \frac{E_0}{H_0}$$

També es pot deduir la relació entre camp elèctric i magnètic d'una ona plana:

$$\mathbf{H} = \mathbf{a_k} \times \frac{\mathbf{E}}{\eta}$$

De tot això es pot concloure que una ona transversal electromagnètica es propaga en la direcció del vector de propagació **k** i que en un pla perpendicular al mateix vector els camps elèctric i magnètic són constants i perpendiculars entre ells.

- *[Cheng1997], pàgines 281-282*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les ones transversals electromagnètiques i hem vist que els vectors de camp elèctric, de camp magnètic i de propagació són ortogonals entre ells en aquest tipus d'ones.

SESSIÓ 15

- Nom: Polarització d'ones planes i llei d'Ohm
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem anat introduint diferents conceptes sobre ones.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem la polarització d'ones i la llei d'Ohm que ens servirà per introduir en sessions posteriors els medis amb pèrdues.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudia el concepte de polarització i se n'analitzen els diferents. També s'estudia la llei d'Ohm per a medis materials.

4.2.3. Polarització d'ones planes

Polarització d'ones planes

La polarització d'una ona plana descriu el comportament del vector camp elèctric en un punt determinat de l'espai. El cas més simple de polarització és la polarització lineal, en la qual la direcció del vector de camp elèctric és constant.
Donat que l'equació d'ona és lineal, la combinació lineal de solucions de l'equació d'ona és també solució de l'equació d'ona, això pot provocar que la direcció del camp elèctric varïi amb el temps, i per tant que apareguin polaritzacions diferents de la lineal.
Suposem una ona plana que es propaga en la direcció de l'eix z, aquesta ona la podem descompondre de la següent manera:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_{10} e^{-jkz} - \mathbf{a}_y jE_{20} e^{-jkz}$$

Podem analitzar les diferents polaritzacions en funció dels valors de E_{10} i E_{20} :

- $E_{10} = 0$ o $E_{20} = 0$: polarització lineal
- $E_{10} = E_{20}$: polarització circular
- $E_{10} \neq E_{20}$: polarització el·líptica

En el cas de les polaritzacions circular i el·líptica, per acabar de definir la polarització, encara ens falta el sentit de gir. Direm que una polarització gira cap a la dreta si apuntant el dit polze en el sentit de propagació de l'ona, els dits de la mà dreta segueixen el sentit de gir del camp elèctric. Direm que gira a l'esquerra en cas contrari.

- *[Cheng1997], pàgines 283-286*

4.3. Ones planes en medis amb pèrdues

4.3.1. La llei d'Ohm per a medis materials

Fins ara hem estudiat, des d'un punt de vista electromagnètic, dos tipus de materials: els dielèctrics i els conductors perfectes. Però existeixen materials que estan en un entremig; aquests materials compleixen la llei d'Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

on σ és la conductivitat del material i està expressada en siemens per metre.

- *[Cheng1997], pàgina 287*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el concepte de polarització, hem vist que hi podien haver polaritzacions lineals, circulars o el·líptiques. Finalment hem estudiat la llei d'Ohm que ens expressa la relació entre el camp elèctric aplicat sobre un medi i la densitat de corrent que això provoca.

SESSIÓ 16

- Nom: Ones planes en medis amb pèrdues
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat les ones planes en medis sense pèrdues i la llei d'Ohm per a medis materials.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem el comportament de les ones planes en medis amb pèrdues, és a dir, que tenen una conductivitat diferent de zero.

CONTINGUTS

En aquesta sessió començarem per estudiar les modificacions que sofreixen les equacions de Maxwell pel fet d'afegir-hi pèrdues, i com això afecta a les ones planes. Finalment estudiarem el cas de baixes pèrdues, que és una simplificació de les ones planes en medis amb pèrdues.

4.3.2. Ones planes en medis amb pèrdues

Ones planes en medis amb pèrdues

El fet que un medi tingui pèrdues es reflecteix en les equacions de Maxwell, concretament en la del rotacional del camp magnètic; l'expressió fasorial queda de la següent manera:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mathbf{E} = j\omega\varepsilon_c\mathbf{E}$$

De l'equació anterior es pot deduir que les equacions que utilitzem pels medis no conductors seran aplicables als medis conductors, sempre i quant substituïm la permitivitat per la permitivitat complexa:

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon' + j\varepsilon''$$

La tangent de pèrdues és una mesura de la pèrdua de potència en el medi:

$$\tan\delta_c = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Anem ara a resoldre l'equació d'ona pel cas d'un medi amb pèrdues, la solució serà la mateixa que per un medi sense pèrdues, però ara tindrem la permitivitat complexa.

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{a_e}E_0 \cdot e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

on

$$\mathrm{k} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$

per tant,

$$j\mathrm{k} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}} = \alpha + j\beta$$

D'aquesta manera la solució de l'equació d'ona ens queda:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{a_e}E_0 \cdot e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}} \cdot e^{-j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}}$$

Aquesta equació es pot interpretar com una ona que viatja amb una constant de fase, β, i que es va atenuant a mesura que avança amb una constant d'atenuació, α.

- *[Cheng1997], pàgines 287-290*

4.3.3. Ones planes en medis amb pèrdues baixes

Ones planes en medis amb pèrdues baixes

Un medi amb pèrdues bàsiques és essencialment un aïllant imperfecte, amb una conductivitat lleugerament diferent de zero. Per tant $\varepsilon'' << \varepsilon'$, que és el mateix que $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$. Partint de les expressions d'un medi amb pèrdues genèric es pot arribar a les expressions del coeficient d'atenuació, de la constant de fase i de la impedància característica.

$$\alpha \cong \frac{1}{2}\sigma\eta$$
$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$
$$\eta \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

D’aquí es pot concloure que un medi amb baixes pèrdues es comporta bàsicament com un dielèctric pel que fa a la impedància característica, a la constant de propagació i a la velocitat de propagació, però amb una petita atenuació en l’amplitud de l’ona.

- *[Cheng1997], pàgines 290-291*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el comportament de les ones planes en medis amb pèrdues, hem vist que el fet que un material tingués una certa conductivitat feia que la permitivitat esdevingués complexa. Els medis amb pèrdues baixes són una simplificació dels anteriors, però molt útil, ja que molts materials es comporten d’aquesta manera.

SESSIÓ 17

- Nom: Ones planes en medis conductors reals
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam introduir el concepte de pèrdues en les ones planes.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem el cas d'un medi conductor real, és a dir, un medi amb una conductivitat molt elevada.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les diferències que existeixen entre les ones que es propaguen en medis sense pèrdues i les ones en l'interior de conductors reals.

4.3.4. Ones planes en medis conductors reals

Ones planes en medis conductors reals

Un conductor real vindrà caracteritzat per una conductivitat molt elevada, per tant $\sigma/\omega\varepsilon >> 1$. Partint de les expressions d'un medi amb pèrdues genèric es pot arribar a les expressions del coeficient d'atenuació, de la constant de fase i de la impedància característica.

$$\alpha \cong \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

$$\beta \cong \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

$$\eta \cong (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

Com es pot observar en un conductor real el coeficient d'atenuació i la constant de fase són iguals. Pel que fa a la impedància característica, aquesta té una fase de 45 graus, això implica que camp elèctric i magnètic estan desfasats també 45 graus.
La velocitat de propagació d'una ona en l'interior d'un conductor serà molt inferior a la de l'espai buit, i per tant la longitud d'ona molt major.

$$u_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}}$$

Definim la profunditat de penetració, com la distància en la qual l'ona s'atenua un factor de 1/e o 0.368.

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}}$$

En un bon conductor la profunditat de penetració serà molt petita, per tant en l'interior del conductor pràcticament no hi existirà camp.

- *[Cheng1997], pàgines 291-295*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el comportament de les ones planes en medis conductors reals, és a dir medis amb una conductivitat molt elevada. Hem vist que les ones planes s'atenuen molt ràpidament a l'interior d'un conductor, això fa que a l'interior dels conductors no hi existeixi pràcticament camp.

SESSIÓ 18

- Nom: El vector de Poynting
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat les ones planes en diferents tipus de medis: sense pèrdues, amb petites pèrdues i conductor real.

OBJECTIUS

L'objectiu d'aquesta sessió és saber determinar la potència que propaguen les ones.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem el vector de Poynting i la potència propagada per una ona plana.

4.4. El vector de Poynting

4.4.1. El vector de Poynting

El teorema de Poynting es pot deduir a partir de les equacions de Maxwell, en forma integral té la següent expressió:

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)dv - \int_V \sigma E^2 dv$$

Aquest teorema ens indica que l'energia que surt de la superfície S per unitat de temps és igual a la variació temporal de les energies elèctrica i magnètica emmagatzemades a l'interior del volum menys l'energia dissipada en forma de calor.
Definim el vector de Poynting com el vector que representa el flux de potència per unitat d'àrea.

$$\wp = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

- *[Cheng1997], pàgines 298-301*

4.4.2. Potència propagada per una ona plana

La densitat mitja de potència representada en magnituds fasorials ve donada per la següent expressió:

$$\wp_{AV} = \frac{1}{2}\Re\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\}$$

Aquesta expressió pot ser utilitzada per calcular la potència propagada per ones, el cas més senzill de les quals és l'ona plana. La seva densitat de potència mitja és:

$$\wp_{AV} = \mathbf{a_k}\frac{E_0^2}{2\eta}$$

Per trobar la potència total propagada per l'ona plana hauríem de fer la integral de tota la superfície de l'ona, en el cas d'una ona plana, aquesta superfície és infinita, fet que indicaria que una ona plana hauria de transmetre una potència infinita. Per tant una ona plana no pot existir físicament, però ens és molt útil per fer aproximacions en petites zones de l'espai.

- *[Cheng1997], pàgines 301-304*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el teorema i el vector de Poynting, que ens serveixen per determinar els diferents tipus d'energies dels camps electromagnètics. També hem vist la forma de determinar la potència propagada per una ona plana.

SESSIÓ 19

- Nom: Incidència normal d'una ona plana sobre plans de discontinuïtat
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat el comportament de les ones planes en diferents medis, així com la potència propagada per ones.

OBJECTIUS

En aquesta sessió s'hauran d'adquirir els coneixements relatius a l'efecte que es produeix quan una ona incideix perpendicularment sobre un pla de discontinuïtat.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà el comportament d'una ona plana quan incideix sobre un pla de discontinuïtat.

4.5. Incidència normal d'ones planes

4.5.1. Incidència normal d'una ona plana sobre plans de discontinuïtat

Quan una ona plana es propaga en un medi i arriba a un medi diferent, aquesta en part es reflecteix i en part es transmet cap a l'altre medi. En aquest apartat estudiarem un cas molt senzill, el cas en que l'ona es propaga perpendicularment a la superfície que separa els dos medis.

L'ona plana incident té la forma següent:

$$\mathbf{E_i}(z) = \mathbf{a_x} E_{i0} e^{-j\beta_1 z}$$

$$\mathbf{H_i}(z) = \mathbf{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

L'ona reflectida serà:

$$\mathbf{E_r}(z) = \mathbf{a_x} E_{r0} e^{j\beta_1 z}$$
$$\mathbf{H_r}(z) = -\mathbf{a_y} \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}$$

I la transmesa:

$$\mathbf{E_t}(z) = \mathbf{a_x} E_{t0} e^{-j\beta_2 z}$$
$$\mathbf{H_t}(z) = \mathbf{a_y} \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}$$

D'aquestes equacions desconeixem $E_{t0} i E_{r0}$. Aquests dos paràmetres, els podem trobar aplicant les condicions de contorn del camp elèctric i magnètic que diuen que aquests han de ser continus en la superfície de separació. Definirem els coeficients de reflexió i de transmissió com les relacions entre les ones reflectida i transmesa i l'ona incident respectivament.

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$
$$\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Aquests coeficients de transmissió i de reflexió poden ser aplicats també a medis amb pèrdues, per tant amb impedàncies característiques complexes. Els coeficients de transmissió i de reflexió estan relacionats de la manera següent:

$$1 + \Gamma = \tau$$

- *[Cheng1997], pàgines 304-309*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat la incidència d'una ona plana en un pla de discontinuïtat. Hem vist que aquesta incidència genera dues ones planes més, una de transmesa i una altra de reflectida. La relació entre l'ona incident i les reflectida i transmesa s'anomena coeficient de reflexió i transmissió, respectivament.

SESSIÓ 20

- Nom: Incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam estudiar la incidència d'una ona plana sobre el pla de discontinuïtat entre dos medis.

OBJECTIUS

En aquesta sessió analitzarem el fenomen de la incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor i veurem el seu principal efecte: les ones estacionàries.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà la incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor, veient els camps resultants d'aquesta incidència.

4.5.2. Incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor

Incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor

Un medi conductor perfecte té una impedància característica nul·la, per tant, si apliquem les fórmules dels coeficients de transmissió i de reflexió ens dóna que:

$$\Gamma = -1$$
$$\tau = 0$$

Això ens indica que l'ona serà reflectida totalment, sense propagar-se cap a l'interior del conductor, com era d'esperar.
Suposem que l'ona plana incident té la forma següent:

$$\mathbf{E_i}(z) = \mathbf{a_x} E_{i0} e^{-j\beta_1 z}$$

$$\mathbf{H_i}(z) = \mathbf{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

Per tant l'ona reflectida serà:

$$\mathbf{E_r}(z) = -\mathbf{a_x} E_{i0} e^{j\beta_1 z}$$

$$\mathbf{H_r}(z) = \mathbf{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}$$

L'ona resultant de la suma de la incident i la reflectida, expressada en el domini del temps és la següent:

$$\mathbf{E}_1(z,t) = \mathbf{a_x} 2E_{i0} \sin(\beta_1 z)\sin(\omega t)$$

$$\mathbf{H}_1(z,t) = \mathbf{a_y} 2\frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z)\cos(\omega t)$$

Aquestes equacions ens indiquen que la reflexió d'una ona en un conductor perfecte genera una ona estacionària que té un mínim de camp elèctric i un màxim de camp magnètic en la superfície conductora.

- *[Cheng1997], pàgines 309-313*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les ones resultants de la incidència normal d'una ona plana sobre un pla conductor perfecte. Hem vist que dintre del conductor no existia camp elèctric, i que per tant tota l'ona era reflectida. Aquesta ona reflectida se sumava a l'ona incident generant el fenomen anomenat ona estacionària.

SESSIÓ 21

- Nom: Lleis de Snell
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les dues sessions anteriors hem estudiat la incidència normal d'ones planes sobre la discontinuïtat entre dos medis dielèctrics qualsevol i sobre un pla conductor perfecte.

OBJECTIUS

En aquesta sessió s'analitzaran les lleis de Snell, que ens permetran conèixer les direccions de les ones transmeses i reflectides quan la incidència sigui obliqua.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran les lleis de Snell, per determinar els angles de les ones transmesa i reflectida, i l'anomenat angle de reflexió total.

4.6. Incidència obliqua d'ones planes

4.6.1. Lleis de Snell

Quan tractem els problemes d'incidències obliqües, el primer pas és determinar les trajectòries que seguiran les ones transmesa i reflectida. Tots els vectors de propagació de les ones estaran sobre el pla d'incidència, que és el pla perpendicular a la interfície entre els dos medis i que conté el vector nombre d'ona de l'ona incident.
La primera llei de Snell determina l'angle de sortida de l'ona reflectida, que és igual a l'angle d'incidència.

$$\theta_r = \theta_i$$

La segona llei de Snell determina l'angle de l'ona transmesa:

$$\frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i)} = \frac{n_1}{n_2}$$

on n són els índex de refracció dels dos medis, és a dir la relació entre la velocitat de la llum en l'espai buit i la velocitat de propagació de l'ona en el medi en qüestió,

$$n = {}^{c}\!/_{u_p} .$$

- *[Cheng1997], pàgines 313-315*

Reflexió total

Quan el medi 1 té un índex de refracció més gran que el del medi 2, definirem l'angle crític o de reflexió total com aquell que fa que l'angle de l'ona transmesa sigui de 90 graus. Per tant:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Si l'angle d'incidència és superior a l'angle crític es forma una ona evanescent en la interfície entre els dos medis que s'atenua ràpidament en la direcció normal a la interfície. Aquesta ona s'anomena ona superficial.

- *[Cheng1997], pàgines 315-319*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les equacions de Snell, la primera de les quals ens ha servit per determinar l'angle de l'ona reflectida. La segona llei de Snell permet determinar l'angle de l'ona transmesa cap al segon medi. També s'ha definit el concepte d'angle de reflexió total, que és l'angle a partir del qual desapareix l'ona transmesa cap al segon medi.

SESSIÓ 22

- Nom: Incidència obliqua amb polarització perpendicular
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estudiat la reflexió d'ones planes que incideixen normalment sobre superfícies de discontinuïtat i les lleis de Snell.

OBJECTIUS

En aquesta sessió analitzarem la incidència obliqua d'ones planes que tenen el camp elèctric perpendicular al pla d'incidència.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà la incidència obliqua d'ones planes amb polarització perpendicular, analitzant les formes que prenen els camps resultants en aquestes condicions. També es determinaran els coeficients de reflexió i de transmissió en aquest context.

4.6.2. Incidència obliqua amb polarització perpendicular

Una ona incideix en polarització perpendicular quan el camp elèctric és perpendicular al pla d'incidència. En aquest cas el vector unitari en la direcció de propagació és:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{ki}} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}} \sin\theta_{\mathrm{i}} + \mathbf{a}_{\mathbf{z}} \cos\theta_{\mathrm{i}}$$

Si l'ona plana incident té la forma següent:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i}}(x,z) = \mathbf{a}_{\mathbf{y}} E_{i0} e^{-j\beta_1 (x \sin\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i}}(x,z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1}\left(-\mathbf{a}_{\mathbf{x}} \cos\theta_{\mathrm{i}} + \mathbf{a}_{\mathbf{z}} \sin\theta_{\mathrm{i}}\right) e^{-j\beta_1 (x \sin\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

l'ona reflectida serà:

$$\mathbf{E_r}(x,z) = \mathbf{a_y} E_{r0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\mathbf{H_r}(x,z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\mathbf{a_x}\cos\theta_r + \mathbf{a_z}\sin\theta_r)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

I la transmesa:

$$\mathbf{E_t}(x,z) = \mathbf{a_y} E_{t0} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\mathbf{H_t}(x,z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\mathbf{a_x}\cos\theta_t + \mathbf{a_z}\sin\theta_t)e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

A partir de les condicions de contorn en la superfície de separació dels dos medis podem trobar els coeficients de reflexió i de transmissió.

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\tau_\perp = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

Els coeficients de transmissió i de reflexió estan relacionats de la següent manera:

$$1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp$$

- *[Cheng1997], pàgines 321-325*

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les formes que prenen els camps elèctric i magnètic quan es produeix la incidència d'una ona plana amb polarització perpendicular sobre un pla de discontinuïtat. També hem vist que els coeficients de reflexió i de transmissió depenien de les impedàncies intrínseques dels medis i de l'angle d'incidència.

SESSIÓ 23

- Nom: Incidència obliqua amb polarització paral·lela
- Tipus: teòrica
- Format: no presencial
- Durada: 2 hores
- Dedicació: 3 hores
- Treball a lliurar: no
- Material:
    - Bibliografia bàsica:
        - [Cheng1997]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vam estudiar la incidència obliqua d'ones planes amb polarització perpendicular.

OBJECTIUS

En aquesta sessió analitzarem la incidència obliqua d'ones planes que tenen el camp elèctric paral·lel al pla d'incidència.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiarà la incidència obliqua d'ones planes amb polarització paral·lela, analitzant les formes que prenen els camps resultants en aquestes condicions. També s'introduirà el concepte d'angle de Brewster de no reflexió.

4.6.3. Incidència obliqua amb polarització paral·lela

Una ona incideix en polarització paral·lela quan el camp elèctric és paral·lel al pla d'incidència. El vector unitari en la direcció de propagació és:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{ki}} = \mathbf{a}_{\mathrm{x}} \sin\theta_{\mathrm{i}} + \mathbf{a}_{\mathrm{z}} \cos\theta_{\mathrm{i}}$$

Per tant l'ona plana incident té la forma següent:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i}}(x,z) = E_{i0}\left(\mathbf{a}_{\mathrm{x}} \cos\theta_{\mathrm{i}} - \mathbf{a}_{\mathrm{z}} \sin\theta_{\mathrm{i}}\right) e^{-j\beta_1 (x \sin\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i}}(x,z) = \mathbf{a}_{\mathrm{y}} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x \sin\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

L'ona reflectida serà:

$$\mathbf{E_r}(x,z) = E_{r0}\left(\mathbf{a_x}\cos\theta_r + \mathbf{a_z}\sin\theta_r\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$
$$\mathbf{H_r}(x,z) = -\mathbf{a_y}\frac{E_{r0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

I la transmesa:

$$\mathbf{E_t}(x,z) = E_{t0}\left(\mathbf{a_x}\cos\theta_t - \mathbf{a_z}\sin\theta_t\right)e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$
$$\mathbf{H_t}(x,z) = \mathbf{a_y}\frac{E_{t0}}{\eta_2}e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

A partir de les condicions de contorn en la superfície de separació dels dos medis podem trobar els coeficients de reflexió i de transmissió.

$$\Gamma_{\|} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$
$$\tau_{\|} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}$$

Els coeficients de transmissió i de reflexió estan relacionats de la següent manera:

$$1 + \Gamma_{\|} = \tau_{\|}\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)$$

- *[Cheng1997], pàgines 325-327*

Angle de Brewster de no reflexió

A partir de l'equació del coeficient de reflexió podem arribar a trobar un angle que faci que aquest sigui zero. Aquest angle és:

$$\theta_{B\|} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Quan una ona incideix amb aquest angle en la interfície dels dos medis, aquesta ona es transmet completament al medi 2.

- *[Cheng1997], pàgines 327-329*

4.6.4. Incidència obliqua amb polarització arbitrària

Sigui quina sigui la polarització de l'ona plana incident, sempre podrem descompondre-la com a combinació lineal d'una polarització paral·lela i d'una polarització perpendicular. Llavors calcularem les ones transmeses i reflectides per cada polarització i obtindrem el resultat tornant a fer la mateixa combinació lineal.

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les formes que prenen els camps elèctric i magnètic quan es produeix la incidència d'una ona plana amb polarització paral·lela sobre un pla de discontinuïtat. També s'ha estudiat el concepte d'angle de Brewster, que és aquell en què es produeix una transmissió total.

BIBLIOGRAFIA

LLIBRES

Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería
Cheng, David K.
Addison Wesley Longman
México, 1997
[Cheng1997]

Advanced Engineering Electromagnetics
Balanis, Constantine A.
John Wiley & Sons
New York, 1989
[Balanis1989]