

2009

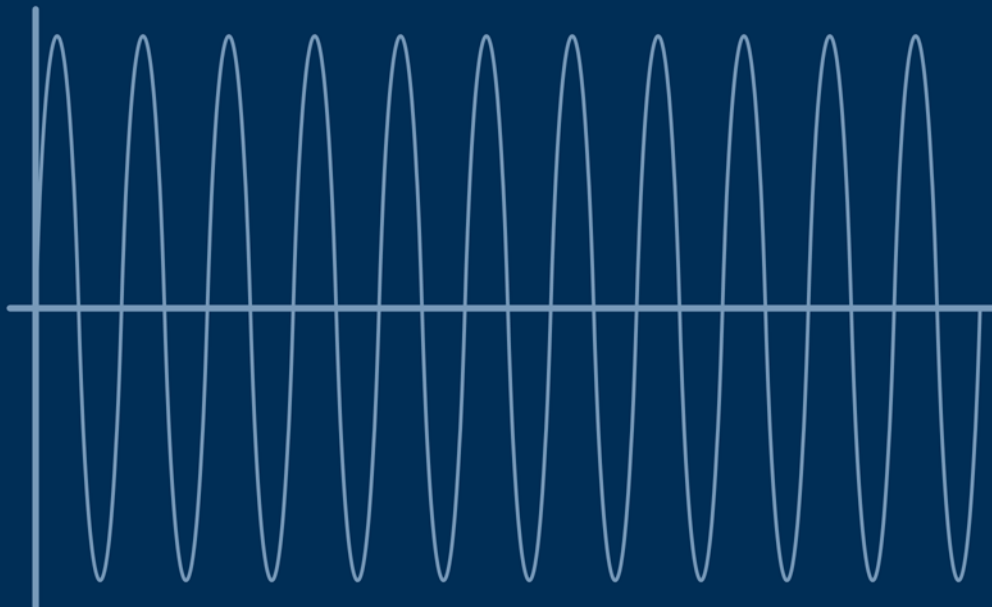
Creative Commons Deed

LaSalleOnLine
ENGINYERIES

CIRCUITS D'ALTA FREQUÈNCIA

Problemes

Miquel Ribó i F. Javier Pajares



LA SALLE 
ENGINYERIA I ARQUITECTURA

Universitat Ramon Llull



Creative Commons License Deed

Reconeixement-No comercial-Sense obres derivades 3.0 Espanya

❖ **Vostè és lliure de:**

Copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra.

❖ **Sota els següents condicionants:**

Reconeixement.

S'ha de referenciar aquesta obra a Fco. Javier Pajares i Miquel Ribó - Enginyeria La Salle (Semipresencial)

No comercial.

No es pot utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.

Sense obres derivades.

No es pot alterar, transformar o generar una obra derivada a partir d'aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Alguna d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Els drets derivats d'usos legítims o altres limitacions reconegudes per llei no queden afectats per l'anterior

Això és un resum fàcilment llegible del text legal (la llicència completa) disponible en els idiomes següents:
Català Castellà Basc Galleg

Crèdits

- ❖ **Autor:** Fco. Javier Pajares i Miquel Ribó
- ❖ **Editor:** Lluís Vicent
- ❖ **Coordinació lingüística:** Sara Laso
- ❖ **Revisió lingüística:** Christian Lara
- ❖ **Maquetació:** Víctor Miras
- ❖ **Disseny de portada:** Víctor Miras

Aquesta edició ha comptat amb el suport de l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de la Generalitat de Catalunya en la Convocatòria d'ajuts a l'edició i la difusió de llibres de text o manuals universitaris i llibres científicotècnics, en suport paper o en suport electrònic, escrits en llengua catalana (DILL 2009)



ISBN: 978-84-937374-3-6



Índex

Pròleg.....	3
Problemes del Tema 2	5
Problema 2.1.....	5
Problema 2.2.....	9
Problema 2.3.....	12
Problema 2.4.....	16
Problema 2.5.....	20
Problemes del Tema 3	25
Problema 3.1.....	25
Problema 3.2.....	28
Problemes del Tema 5	35
Problema 5.1.....	35
Problema 5.2.....	41
Problema 5.3.....	45
Problema 5.4.....	51
Problema 5.5.....	56



Pròleg

Aquesta petita col·lecció de problemes resolts pretén complementar els apunts publicats de l'assignatura de Circuits d'Alta Freqüència. Conté alguns problemes representatius dels diferents temes que componen el curs de Circuits d'Alta Freqüència als estudis d'enginyeria a La Salle – URL. L'èmfasi dels problemes és en els temes més fonamentals del curs: comprensió i càlcul dels paràmetres S, comprensió del funcionament de circuits complexos mitjançant la seva anàlisi a partir de blocs constitutius, i teoria d'amplificadors lineals de microones.

Esperem que us sigui una ajuda vàlida per a entrar en el món del disseny de circuits d'alta freqüència i microones.

Els professors,

Miquel Ribó i Pal
Francisco Javier Pajares Vega



Problemes del Tema 2

Problema 2.1

Calculeu els paràmetres S , referits a les impedàncies de referència especificades, dels circuits següents:

- (a) Admitància en paral·lel, amb els seus ports referits a Z_0 (Fig. 1).

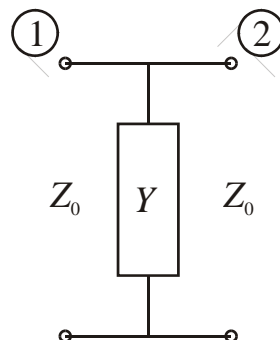


Fig. 1. Admitància en paral·lel.

- (b) Línia de transmissió d'impedància característica Z_0 , amb els seus ports referits a Z_0 (Fig. 2).

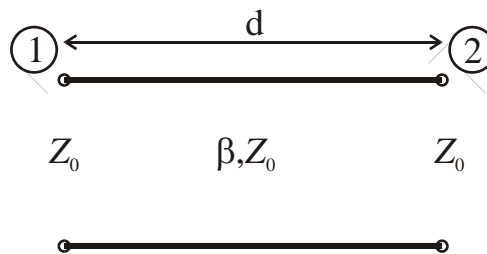


Fig. 2. Línia de transmissió amb els seus ports referits a Z_0 .

- (c) Canvi de medi (Fig. 3).

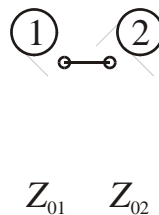


Fig. 3. Canvi de medi.

Resolució del problema 2.1

- (a) Resoldrem el circuit pel mètode de tensions i corrents.



Per a calcular els paràmetres S_{ij} carreguem tots els ports que no siguin el port 1 (en aquest cas només el port 2 amb la seva impedància de referència (Fig. 5).

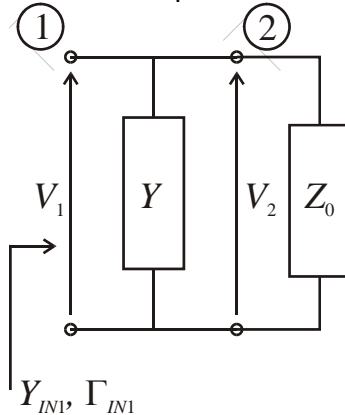


Fig. 4. Circuit de la Fig. 1 amb el port 2 carregat amb la seva impedància de referència.

L'admitància d'entrada d'aquest circuit és $Y_{IN1} = Y + Y_0$. Per tant, el paràmetre S_{11} val

$$S_{11} = \Gamma_{IN1} = \frac{Y_{01} - Y_{IN1}}{Y_{01} + Y_{IN1}} = \frac{Y_0 - Y_{IN1}}{Y_0 + Y_{IN1}} = \frac{Y_0 - Y - Y_0}{Y_0 + Y + Y_0} = \frac{-Y}{2Y_0 + Y}.$$

El paràmetre S_{21} el trobarem utilitzant la fórmula

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{Z_{0j}}}{\sqrt{Z_{0i}}} (1 + S_{jj}) \frac{V_i}{V_j} \Big|_{a_k=0, k \neq j}.$$

Per tant, cal calcular $\frac{V_2}{V_1} \Big|_{a_2=0}$, és a dir $\frac{V_2}{V_1}$ quan tenim tots els ports que no siguin el port 1 carregats amb la seva impedància de referència (en aquest cas això equival a tenir el port 2 carregat amb Z_0). Evidentment, en aquest cas

$$\frac{V_2}{V_1} = 1$$

i, per tant,

$$S_{21} = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0}} (1 + S_{11}) \frac{V_2}{V_1} \Big|_{a_2=0} = 1 + S_{11} = 1 - \frac{Y}{2Y_0 + Y} = \frac{2Y_0}{2Y_0 + Y}.$$

A continuació hauríem de calcular els paràmetres S_{i2} , amb una metodologia anàloga a la que acabem d'emprar, però podem estalviar-nos els càlculs adonant-nos que:

1. $S_{22} = S_{11}$ per la simetria del circuit: el circuit és elèctricament simètric i les impedàncies de referència als ports 1 i 2 també ho són. Per tant, per a calcular S_{22} i S_{12} farem les mateixes operacions que per a calcular S_{11} i S_{21} , però intercanviant els subíndex 1 i 2.
2. $S_{12} = S_{21}$ per la simetria del circuit, i també perquè el circuit és recíproc.



Per tant,

$$S = \frac{1}{2Y_0 + Y} \begin{bmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{bmatrix}.$$

(b) Resoldrem el circuit pel mètode de tensions i corrents. Per a calcular els paràmetres S_{i1} carreguem tots els ports que no siguin el port 1 (en aquest cas només el port 2 amb la seva impedància de referència (Fig. 5).

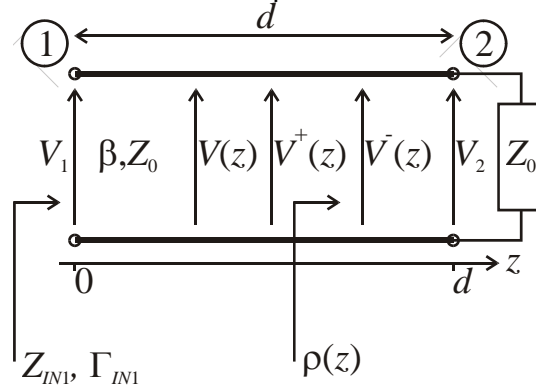


Fig. 5. Circuit de la Fig. 2 amb el port 2 carregat amb la seva impedància de referència.

Com que la impedància de càrrega de la línia és igual a la seva impedància de referència,

$$\rho(d) = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0 \Rightarrow \rho(z) = 0 \Rightarrow V^-(z) = 0 \Rightarrow V(z) = V^+(z) = V^+ e^{-j\beta z}.$$

Per tant,

$$\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=0} = \frac{V(d)}{V(0)} = \frac{V^+ e^{-j\beta d}}{V^+} = e^{-j\beta d}.$$

Com que $Z_{IN1} = Z_0$, aleshores

$$S_{11} = \Gamma_{IN1} = \frac{Z_{IN1} - Z_{01}}{Z_{IN1} + Z_{01}} = \frac{Z_{IN1} - Z_0}{Z_{IN1} + Z_0} = 0$$

i

$$S_{21} = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0}} (1 + S_{11}) \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=0} = e^{-j\beta d}.$$

Igual que en l'apartat anterior, per consideracions de simetria i reciprocitat, $S_{22} = S_{11}$ i $S_{12} = S_{21}$. Per tant,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta d} \\ e^{-j\beta d} & 0 \end{bmatrix} = e^{-j\beta d} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aquest resultat ens diu que (en el cas que els paràmetres S tinguin sentit físic) una línia de transmissió desfasa les ones que hi circulen, tan del port 1 al 2 com del 2 a l'1 una fase d' $e^{-j\beta d}$ radians.

(c) Resoldrem el circuit pel mètode de tensions i corrents.



Per a calcular els paràmetres S_{i1} carreguem tots els ports que no siguin el port 1 (en aquest cas només el port 2 amb la seva impedància de referència (Fig. 6).

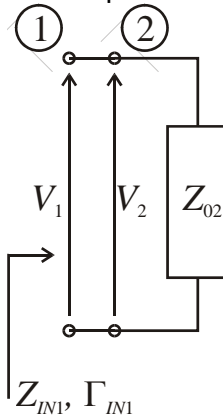


Fig. 6. Circuit de la Fig. 3 amb el port 2 carregat amb la seva impedància de referència (Z_{02}).

Evidentment $Z_{IN1} = Z_{02}$ i

$$\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=0} = 1$$

Per tant,

$$S_{11} = \Gamma_{IN1} = \frac{Z_{IN1} - Z_{01}}{Z_{IN1} + Z_{01}} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

i

$$S_{21} = \frac{\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} (1 + S_{11}) \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{a_2=0} = \frac{\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \left(1 + \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \right) = \frac{\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = 2 \frac{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

Com que en aquest cas la xarxa no és simètrica (físicament sí que ho és però les impedàncies de referència no ho són), ens caldrà calcular els paràmetres S_{i2} de manera explícita (si més no S_{22} , puix que $S_{12} = S_{21}$ per reciprocitat). Per tant, carreguem tots els ports que no siguin el port 2 (en aquest cas només el port 1) amb la seva impedància de referència (Fig. 7).

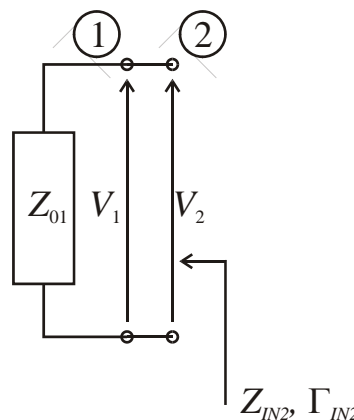


Fig. 7. Circuit de la Fig. 3 amb el port 1 carregat amb la seva impedància de referència (Z_{01}).



En aquest cas $Z_{IN2} = Z_{01}$ i

$$\left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{a_1=0} = 1$$

Per tant,

$$S_{22} = \Gamma_{IN2} = \frac{Z_{IN2} - Z_{02}}{Z_{IN2} + Z_{02}} = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} = -S_{11}$$

i

$$S_{12} = \frac{\sqrt{Z_{02}}}{\sqrt{Z_{01}}} (1 + S_{22}) \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{a_1=0} = \frac{\sqrt{Z_{02}}}{\sqrt{Z_{01}}} \left(1 + \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \right) = \frac{\sqrt{Z_{02}}}{\sqrt{Z_{01}}} \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = 2 \frac{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{Z_{02} + Z_{01}} = S_{21}$$

El resultat final serà

$$S = \frac{1}{Z_{02} + Z_{01}} \begin{bmatrix} Z_{02} - Z_{01} & 2\sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ 2\sqrt{Z_{01}Z_{02}} & Z_{01} - Z_{02} \end{bmatrix}$$

Problema 2.2

Un inversor d'impedàncies pot ser realitzat bé amb un transformador $\lambda/4$ (Fig. 8(a)) o bé amb una estructura de filtre passa baixes com la que mostra la Fig. 8(b), que es pot utilitzar si la freqüència de disseny és massa baixa per a permetre un tram $\lambda/4$ en un disseny o si es pretén integrar l'inversor d'impedàncies en un circuit integrat. Demostreu que en la freqüència central de disseny f_0 (aquella en què la longitud d'ona és λ_0) el circuit de la Fig. 8(b) pot comportar-se com un inversor d'impedàncies de funcionament igual al transformador $\lambda/4$, i trobeu els valors d'L i C que fan que això es compleixi.

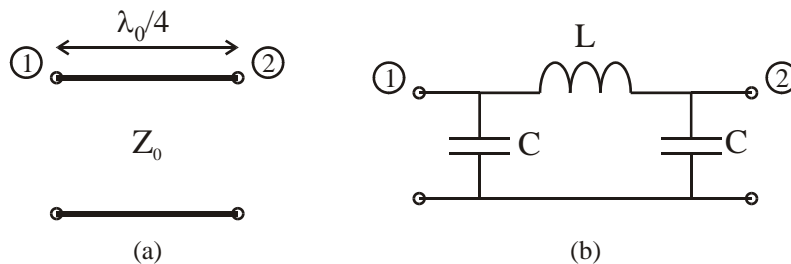


Fig. 8. (a) Transformador $\lambda/4$. (b) Filtre passa baixes equivalent.

Resolució del problema 2.2

Si dos circuits són equivalents en una determinada freqüència, tenen el mateix comportament en aquesta freqüència. Per tant, si referenciem els seus ports corresponents als mateixos valors d'impedància de referència ($Z_{01A} = Z_{01B} = Z_{01}$ i $Z_{02A} = Z_{02B} = Z_{02}$), les seves matrius de paràmetres S seran iguals. Com que, a més a més, els nostres circuits són físicament simètrics, si escollim com a impedàncies de referència $Z_{01} = Z_{02}$, aleshores les xarxes estaran en condicions de poder ser analitzades per descomposició en mode parell i en mode senar. Des d'aquest punt de vista, les matrius de paràmetres S seran iguals si i només si les seves descomposicions en mode parell i mode senar respectives són iguals:



$$S_A|_{Z_{01}=Z_{02}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{eA} + \Gamma_{oA} & \Gamma_{eA} - \Gamma_{oA} \\ \Gamma_{eA} - \Gamma_{oA} & \Gamma_{eA} + \Gamma_{oA} \end{bmatrix} = S_B|_{Z_{01}=Z_{02}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{eB} + \Gamma_{oB} & \Gamma_{eB} - \Gamma_{oB} \\ \Gamma_{eB} - \Gamma_{oB} & \Gamma_{eB} + \Gamma_{oB} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma_{eA} = \Gamma_{eB} \\ \Gamma_{oA} = \Gamma_{oB} \end{cases} .$$

Per tant, només ens cal calcular, i igualar, les descomposicions en mode parell i mode senar respecte d'un valor d'impedància de referència igual per a tots els ports. És evident que, per al cas de la línia de transmissió el valor d'impedància de referència que ens simplificarà més els càlculs serà $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$, elecció que no complicarà per a res els del circuit passa baixes. Per tant, Z_0 escollim com a impedància de referència per a tots els ports.

Calculem primer les descomposicions en mode parell i senar (Fig. 9) del transformador $\lambda/4$ de la Fig. 8(a).

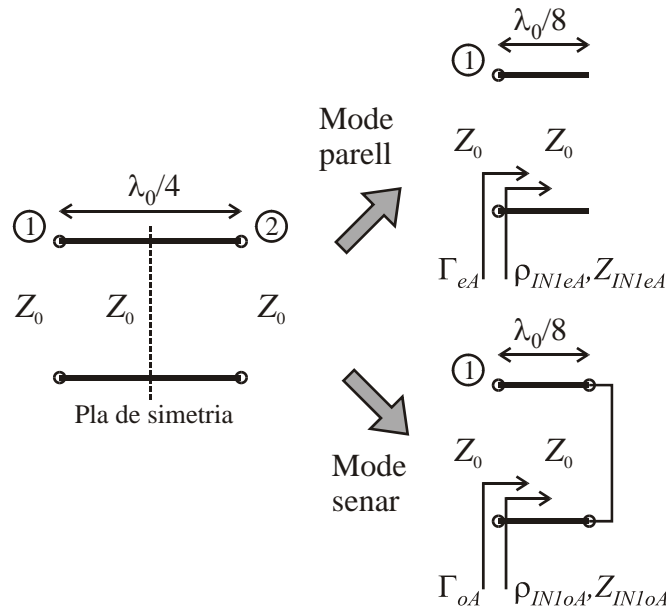


Fig. 9. Descomposició en mode parell i senar del transformador $\lambda/4$.

Per a la descomposició en mode parell

$$\rho_{INeA} = 1e^{-j2\beta\frac{\lambda_0}{8}} = e^{-j2\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j .$$

Com que

$$\rho_{INeA} = \frac{Z_{INeA} - Z_0}{Z_{INeA} + Z_0}$$

(ací Z_0 és el valor de la impedància característica de la línia de transmissió) i

$$\Gamma_{eA} = \frac{Z_{INeA} - Z_0}{Z_{INeA} + Z_0}$$

(ací Z_0 és el valor de la impedància de referència del port), es compleix que

$$\Gamma_{eA} = \rho_{INeA} = -j .$$

Anàlogament podem raonar per a la descomposició en mode senar obtenint



$$\Gamma_{oA} = \rho_{INoA} = -1e^{-j2\beta\frac{\lambda_0}{8}} = j.$$

Si calculem ara la descomposició en mode parell i mode (Fig. 10) senar del filtre passa baixes equivalent de Fig. 8(b).

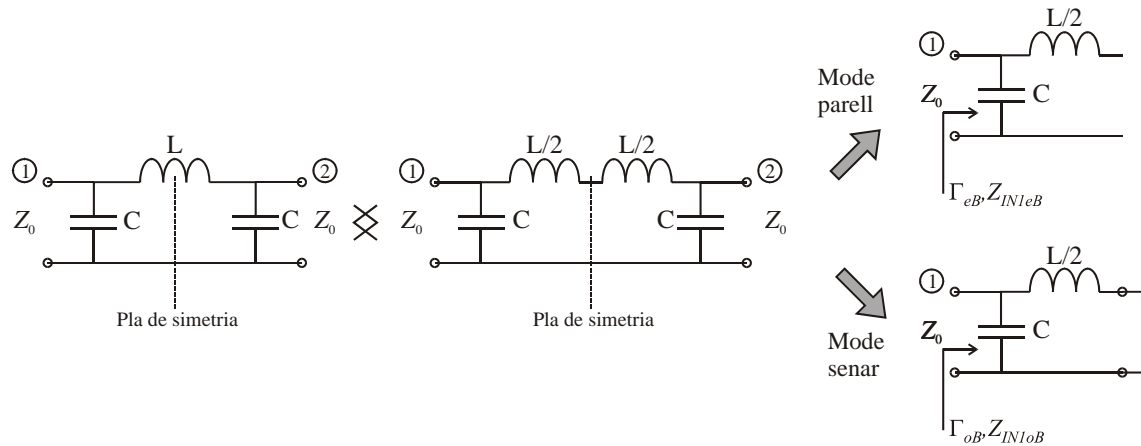


Fig. 10. Descomposició en mode parell i senar del circuit passa baixes equivalent.

Per a la descomposició en mode parell

$$Z_{INeB} = \frac{1}{j\omega_0 C}$$

i per tant

$$\Gamma_{eB} = \frac{Z_{INeB} - Z_0}{Z_{INeB} + Z_0} = \frac{\frac{1}{j\omega_0 C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega_0 C} + Z_0} = \frac{1 - j\omega_0 CZ_0}{1 + j\omega_0 CZ_0}.$$

Per a la descomposició en mode senar

$$Z_{INoB} = \frac{1}{j\omega_0 C + \frac{1}{j\omega_0 \frac{L}{2}}} = \frac{j\omega_0 \frac{L}{2}}{j^2 \omega_0^2 C \frac{L}{2} + 1} = \frac{j\omega_0 L}{2 - \omega_0^2 LC}$$

i per tant

$$\Gamma_{oB} = \frac{Z_{INoB} - Z_0}{Z_{INoB} + Z_0} = \frac{\frac{j\omega_0 L}{2 - \omega_0^2 LC} - Z_0}{\frac{j\omega_0 L}{2 - \omega_0^2 LC} + Z_0} = \frac{j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0^2 LCZ_0}{j\omega_0 L + 2Z_0 - \omega_0^2 LCZ_0}.$$

Igualant ara les descomposicions en mode parell obtenim

$$\Gamma_{eA} = \Gamma_{eB} \Leftrightarrow$$

$$-j = \frac{1 - j\omega_0 CZ_0}{1 + j\omega_0 CZ_0} \Leftrightarrow 1 - j\omega_0 CZ_0 = -j + \omega_0 CZ_0 \Leftrightarrow$$



$$1 + j = j\omega_0 CZ_0 + \omega_0 CZ_0 \Leftrightarrow 1 + j = (1 + j)\omega_0 CZ_0 \Leftrightarrow 1 = \omega_0 CZ_0 \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 Z_0} .$$

Igualant ara les descomposicions en mode senar obtenim

$$\Gamma_{oA} = \Gamma_{oB} \Leftrightarrow$$

$$j = \frac{j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0^2 LCZ_0}{j\omega_0 L + 2Z_0 - \omega_0^2 LCZ_0} \Leftrightarrow$$

$$j = \frac{j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0^2 LCZ_0}{j\omega_0 L + 2Z_0 - \omega_0^2 LCZ_0} = \frac{j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0^2 L \frac{1}{\omega_0 Z_0} Z_0}{j\omega_0 L + 2Z_0 - \omega_0^2 L \frac{1}{\omega_0 Z_0} Z_0} = \frac{j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0 L}{j\omega_0 L + 2Z_0 - \omega_0 L} \Leftrightarrow$$

$$- \omega_0 L + j2Z_0 - j\omega_0 L = j\omega_0 L - 2Z_0 + \omega_0 L \Leftrightarrow j2Z_0 + 2Z_0 = 2j\omega_0 L + 2\omega_0 L \Leftrightarrow$$

$$(1 + j)2Z_0 = (1 + j)2\omega_0 L \Leftrightarrow Z_0 = \omega_0 L \Leftrightarrow$$

$$L = \frac{Z_0}{\omega_0} .$$

Cal notar que aquesta equivalència només és exacta en la freqüència de disseny f_0 i que, a mesura que ens n'allunyem, els valors dels paràmetres S d'ambdós circuits aniran divergint paulatinament.

Problema 2.3

Una manera no gaire elegant de dividir la potència d'un generador (que suposarem canònic ($Z_G = Z_0$) per a simplificar) entre n circuits iguals (que suposarem que tenen una impedància d'entrada $Z_{IN} = Z_0$ per a simplificar) és connectar-los directament en paral·lel a la font de senyal (Fig. 11).

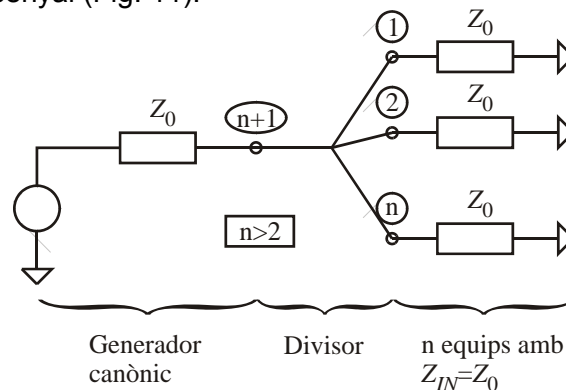


Fig. 11. Connexió directa entre un generador (d'impedància interna Z_0 i n càrregues, totes amb impedància d'entrada Z_0).

- Raoneu quines relacions hi ha entre els paràmetres S (referits a Z_0) de la matriu $(n+1) \times (n+1)$ que descriu el divisor format per la connexió en paral·lel dels esmentats equips.
- Calculeu la matriu de paràmetres S del circuit divisor.



- (c) Calculeu la relació entre la potència injectada com a ona incident pel generador i la potència total consumida pels n equips alhora.
- (d) Per a quin valor de n la potència reflectida (no aprofitada pels n equips alhora) iguala o supera a la potència consumida per cadascun dels equips?

Resolució 2.3

- (a) La xarxa de què hem de calcular els paràmetres S (referits a Z_0) és la que es mostra en la Fig. 12.

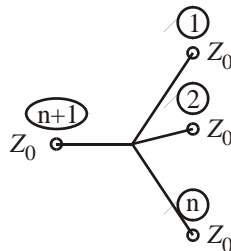


Fig. 12. Divisor amb la seva numeració de ports i impedàncies de referència.

Puix que les impedàncies de referència són les mateixes en tots els ports, l'estructura del divisor és elèctricament simètrica: els enumerem com els enumerem, sempre veurem, elèctricament parlant, el mateix circuit. Això ens indica que la xarxa només té dos paràmetres S diferents, un de reflexió i un de transmissió entre dos ports qualssevol.

- (b) Calculem, per exemple, els paràmetres $S_{n+1,n+1}$ i $S_{1,n+1}$.

Utilitzarem l'únic mètode de càlcul al nostre abast, que és el de tensions i corrents. Per tal de fer-ho, carreguem tots els ports, excepte el port $n+1$ amb la seva impedància de referència (Fig. 13).

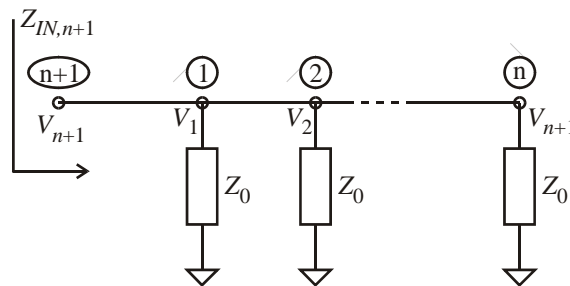


Fig. 13. Divisor amb els ports 1, ..., n carregats amb la seva impedància de referència.

És evident que la impedància d'entrada d'aquest circuit val

$$Z_{IN,n+1} = \frac{Z_0}{n}$$

i, per tant,

$$S_{n+1,n+1} = \frac{Z_{IN,n+1} - Z_0}{Z_{IN,n+1} + Z_0} = \frac{\frac{Z_0}{n} - Z_0}{\frac{Z_0}{n} + Z_0} = \frac{1-n}{1+n}.$$



D'altra banda,

$$\frac{V_1}{V_{n+1}} = \frac{V_2}{V_{n+1}} = \dots = \frac{V_n}{V_{n+1}} = 1$$

i, per tant,

$$S_{1,n+1} = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0}} (1 + S_{n+1,n+1}) \frac{V_1}{V_{n+1}} \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_n=0} = \left(1 + \frac{1-n}{1+n}\right) = \frac{2}{1+n}.$$

La matriu $(n+1) \times (n+1)$ de paràmetres S resultant és, per tant,

$$S = \frac{1}{1+n} \begin{bmatrix} 1-n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1-n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 1-n \end{bmatrix}.$$

(c) Podem posar el circuit de la Fig. 11 tal com es mostra en la Fig. 12.

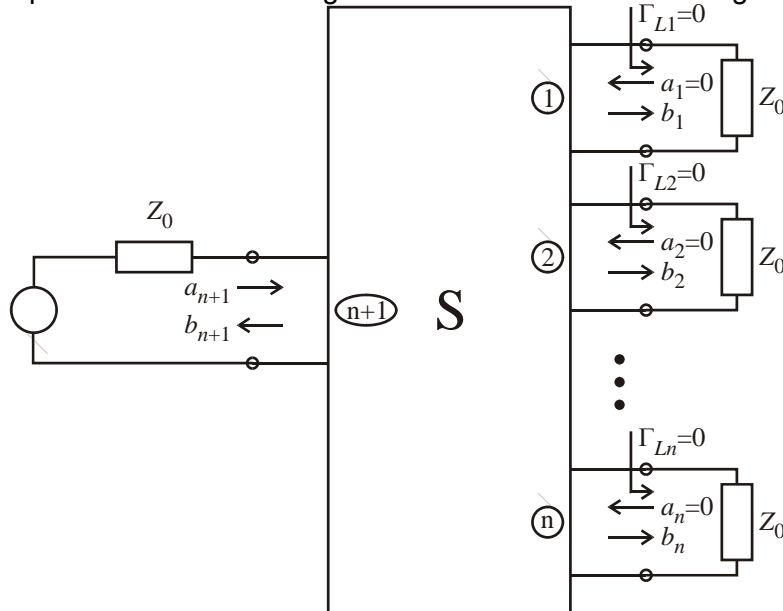


Fig. 14. Divisor modelat com una caixa amb $n+1$ ports, caracteritzada per la seva matriu de paràmetres S .

A partir de la matriu de paràmetres S i tenint en compte que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ podem escriure

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+n} \begin{bmatrix} 1-n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1-n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 1-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{1+n} a_{n+1} \\ b_2 &= \frac{2}{1+n} a_{n+1} \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{2}{1+n} a_{n+1} \\ b_{n+1} &= \frac{1-n}{1+n} a_{n+1} \end{aligned}$$

La potència que el generador entrega al circuit mitjançant l'ona progressiva val

$$P_{n+1}^+ = \frac{1}{2} |a_{n+1}|^2.$$

La potència neta que consumeix la càrrega i -èsima ($i=1, \dots, n$) val

$$P_{Li} = \frac{1}{2} |b_i|^2 - \frac{1}{2} |a_i|^2 = \frac{1}{2} |b_i|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{2}{1+n} a_{n+1} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+n} \right)^2 |a_{n+1}|^2 = \frac{4}{(1+n)^2} P_{n+1}^+$$

Per tant, la relació entre la potència neta consumida per les n càrregues alhora i la potència injectada pel circuit en forma d'ona incident val

$$\frac{\sum_{i=1}^n P_{Li}}{P_{n+1}^+} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{4}{(1+n)^2} P_{n+1}^+}{P_{n+1}^+} = \frac{n \frac{4}{(1+n)^2} P_{n+1}^+}{P_{n+1}^+} = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Cal remarcar que aquest resultat ens indica que aquesta manera de dividir la potència és en general poc efectiva ja que, com major és n , menys potència som capaços d'injectar al conjunt de les n càrregues alhora.

(d) La potència reflectida per les n càrregues alhora val

$$P_{n+1}^- = \frac{1}{2} |b_{n+1}|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{1-n}{1+n} a_{n+1} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 |a_{n+1}|^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 P_{n+1}^+.$$

Si aquesta potència ha d'igualar la que consumeix un sol equip, aleshores

$$\begin{aligned} P_{n+1}^- &= P_{Li} \\ \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 P_{n+1}^+ &= \frac{4}{(1+n)^2} P_{n+1}^+ \\ (1-n)^2 &= 4 \\ n^2 - 2n - 3 &= 0 \\ n &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Com que $n = -1$ és absurd, la resposta correcta és $n = 3$



Problema 2.4

En l'article de H. Gruchala i A. Rutkowski, *Frequency Detector with Power Combiner Dividers*, (IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 8, no. 5, pàg. 179-181, Maig de 1998), s'hi proposa un nou model de detector de freqüència basat en l'interferòmetre que es mostra en la Fig. 15.

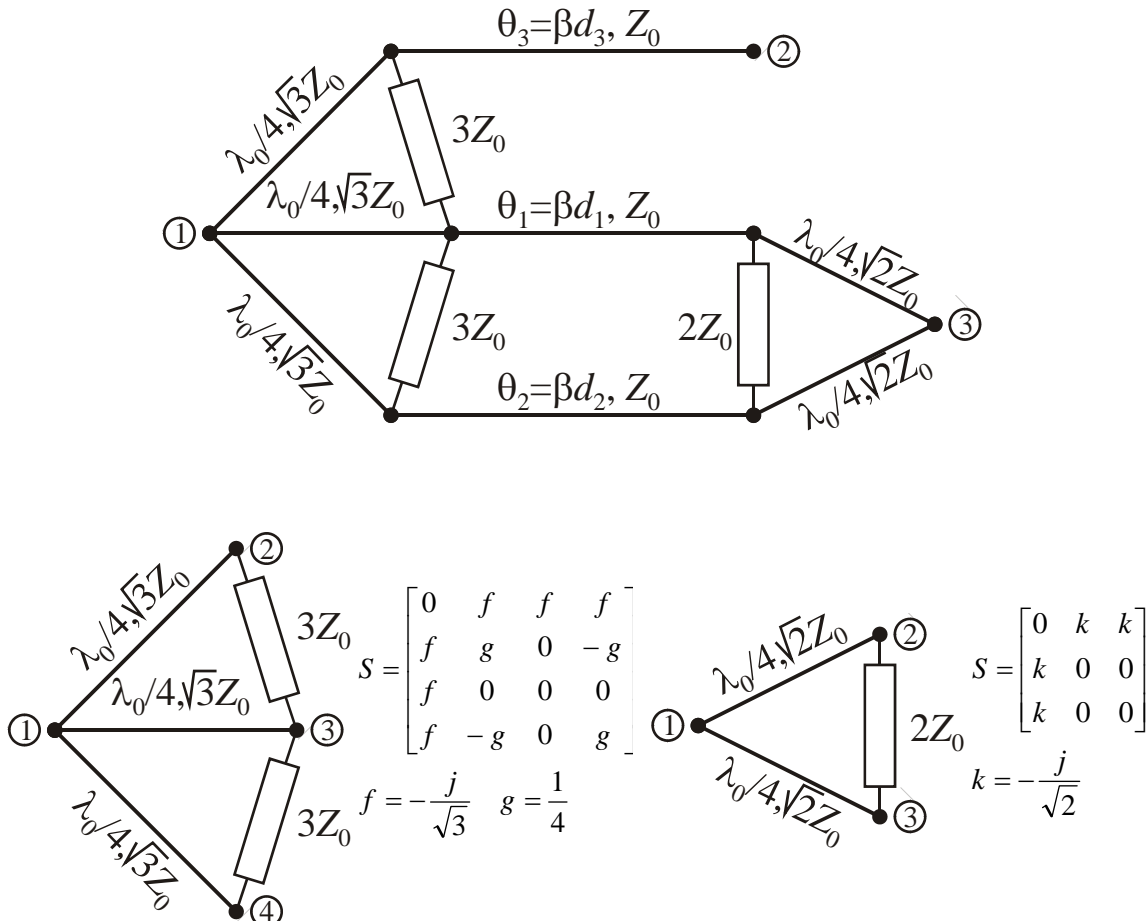


Fig. 15. Estructura de l'interferòmetre i paràmetres S dels seus divisors de senyal constituents.

- Per a comprendre el funcionament del detector, primerament és necessari comprendre el funcionament de l'interferòmetre. Aquest està format per 3 trams de línia de transmissió de longituds d_1 , d_2 i d_3 , que connecten de la manera indicada un divisor de senyal de 3 sortides amb un divisor de Wilkinson de dues (els paràmetres S dels quals, amb les numeracions de ports corresponents, es mostren en el peu de la Fig. 15). Calculeu els paràmetres S de l'interferòmetre.
- El detector de freqüència es realitza connectant dos detectors de potència perfectament adaptats ($Z_{IN} = Z_0$) en els ports 2 i 3 de l'interferòmetre (Fig. 16). Calculeu P_2 i P_3 en funció d' a_{IN} , així com la relació P_3/P_2 , que és la que contindrà informació sobre freqüència. Deixeu el resultat en funció d' f , g , k , d_1 , d_2 , i d_3 . Quina és la funció del detector en el port 2?

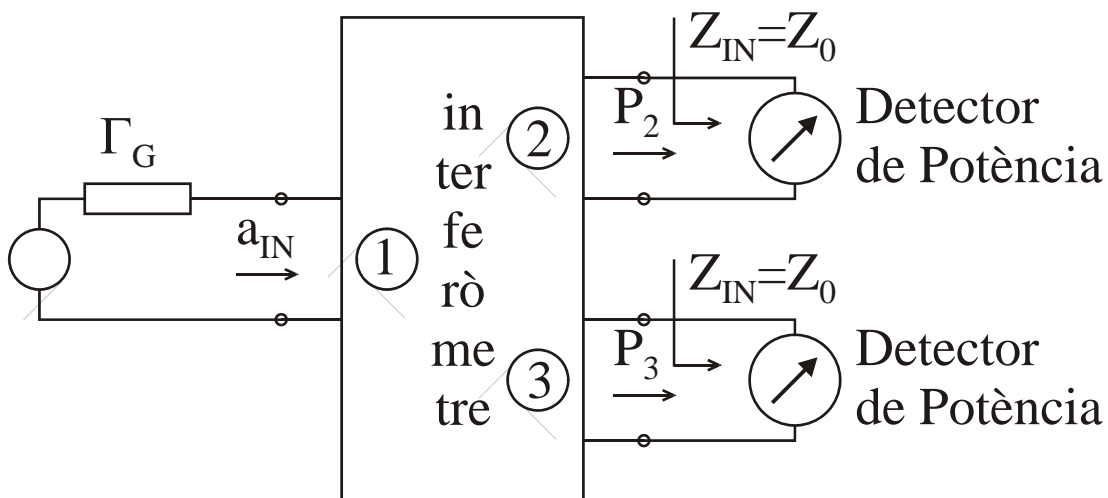


Fig. 16. Esquema del detector de freqüència.

- (c) De l'article, o simplement inspeccionant l'expressió obtinguda per a P_3/P_2 , pot deduir-se que una bona tria de longituds és $d_2 = d_1 + \lambda_0/4$, on λ_0 és la longitud d'ona a la freqüència central f_0 de disseny de l'interferòmetre. Fent aquesta suposició, trobeu una expressió de P_3/P_2 en funció de la freqüència. Tingueu en compte que $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{f}{f_0}$ i $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$. Tingueu present que l'expressió obtinguda només serà vàlida mentre els paràmetres S dels divisors de Wilkinson no variïn gaire respecte dels que tenen en la freqüència central f_0 de disseny (els llistats a les matrius de paràmetres S). Per als nostres divisors podem suposar amplituds relatives BW/f_0 superiors al 40%.
- (d) Finalment, trobeu una expressió lineal de la freqüència detectada f al voltant de f_0 , en funció de P_3/P_2 . Recordeu que $f(x)|_{x \rightarrow a} \cong f(a) + f'(a)(x - a)$.

Resolució problema 2.4

- a) Primerament, farem un canvi de plans de referència al divisor de tres sortides.

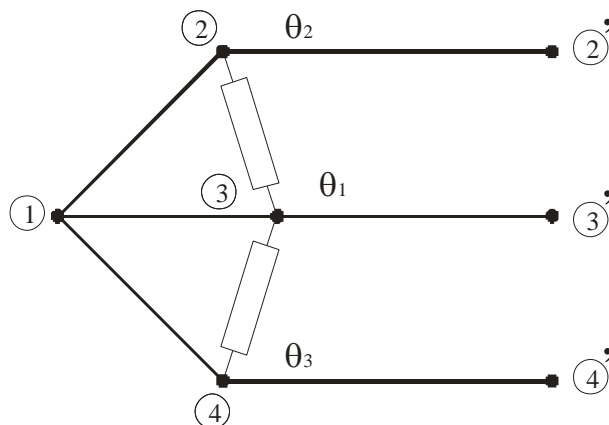


Fig. 17. Divisor de tres sortides amb canvi de plans de referència.



$$S_{i'i} = S_{ii} \cdot e^{-2j\beta l_i}$$

$$S_{i'j} = S_{ij} \cdot e^{-(j\beta l_i + \beta_j l_j)}$$

La matriu de paràmetres S que obtindrem serà:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & f \cdot e^{-j\theta_3} & f \cdot e^{-j\theta_2} & f \cdot e^{-j\theta_2} \\ f \cdot e^{-j\theta_3} & g \cdot e^{-j2\theta_3} & 0 & -g \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \\ f \cdot e^{-j\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ f \cdot e^{-j\theta_2} & -g \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} & 0 & g \cdot e^{-j2\theta_2} \end{bmatrix}$$

Si ens centrem ara a resoldre l'interferòmetre global:

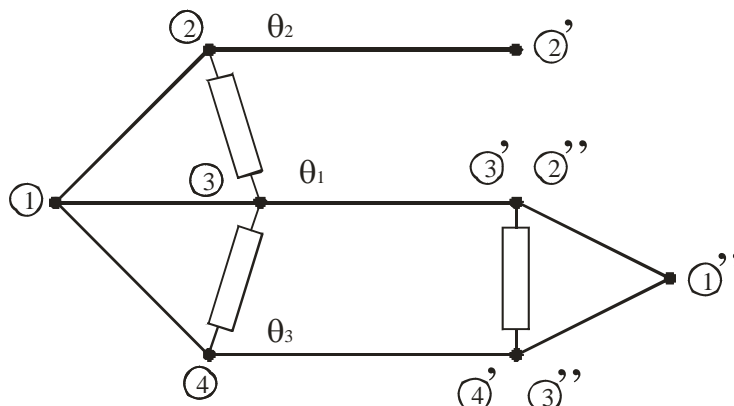


Fig. 18. L'interferòmetre de l'enunciat.

Amb els les denominacions òbvies per a les ones del circuit, les connexions entre els ports 3' i 4' amb els ports 3'' i 4'' imposen les lligadures següents:

$$b'_3 = a''_2$$

$$b''_2 = a'_3$$

$$b'_4 = a''_3$$

$$b''_3 = a'_4$$

Si desenvolupem les equacions de l'interferòmetre:

$$b'_1 = f \cdot e^{-j\theta_3} \cdot a'_2 + f \cdot e^{-j\theta_1} \cdot a'_3 + f \cdot e^{-j\theta_2} \cdot a'_4 \quad \stackrel{\substack{a'_3 = b''_2 = k \cdot a''_1 \\ a'_4 = b''_3 = k \cdot a'_4}}{=} \quad f \cdot e^{-j\theta_3} \cdot a'_2 + fk \cdot (e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}) \cdot a''_1$$

$$b'_2 = f \cdot e^{-j\theta_3} \cdot a'_1 + g \cdot e^{-2j\theta_3} \cdot a'_2 - g \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \cdot a'_4 \quad \stackrel{\substack{a'_3 = b''_2 = k \cdot a''_1 \\ a'_4 = b''_3 = k \cdot a'_4}}{=} \quad f \cdot e^{-j\theta_3} \cdot a'_1 + g \cdot e^{-2j\theta_3} \cdot a'_2 - gk \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \cdot a''_1$$

$$b'_3 = f \cdot e^{-j\theta_1} \cdot a'_1$$

$$b'_4 = f \cdot e^{-j\theta_2} \cdot a'_1 - g \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \cdot a'_2 + g \cdot e^{-2j\theta_2} \cdot a'_4$$

$$b''_1 = ka''_2 + ka''_3 = kb'_3 + kb'_4 = fk \cdot e^{-j\theta_1} \cdot a'_1 + fk \cdot e^{-j\theta_2} \cdot a'_1 - gk \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \cdot a'_2 + gk \cdot e^{-2j\theta_2} \cdot a'_4 =$$

$$= fk \cdot (e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}) \cdot a'_1 - gk \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \cdot a'_2 + gk^2 \cdot e^{-2j\theta_2} \cdot a''_1$$

$$b''_2 = ka''_2$$

$$b''_3 = ka''_1$$



Per tant:

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \cdot e^{-j\theta_3} & fk \cdot (e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}) \\ f \cdot e^{-j\theta_3} & g \cdot e^{-2j\theta_3} & -gk \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} \\ fk \cdot (e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}) & -gk \cdot e^{-j(\theta_2+\theta_3)} & gk^2 \cdot e^{-2j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_1'' \end{bmatrix}$$

b) Si estudiem l'esquema del detector de freqüència de l'enunciat:

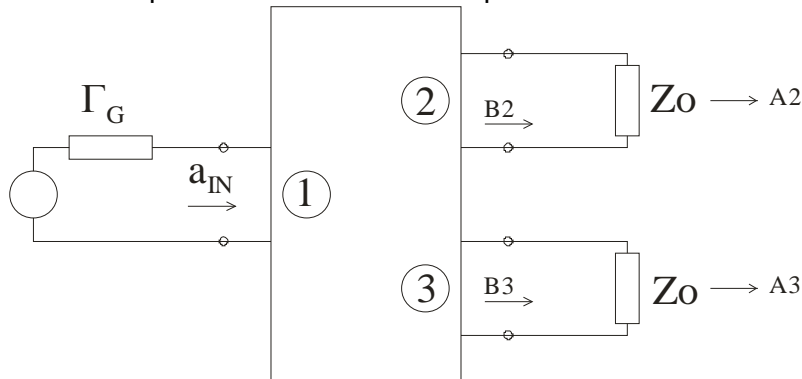


Fig. 19. Esquema del detector de freqüència.

D'aquí podem extreure:

$$\begin{aligned} b_{IN} &= 0 \\ b_2 &= f \cdot e^{-j\theta_3} \cdot a_{IN} \\ b_3 &= fk \cdot (e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}) \end{aligned}$$

A més, si intentem relacionar P_2 i P_3 en funció d' a_{IN} trobem que:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_2^- - P_2^+ = P_2^- = \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{2}|f|^2 \cdot |a_{IN}|^2 \\ P_3 &= P_3^- - P_3^+ = P_3^- = \frac{1}{2}|b_3|^2 = \frac{1}{2}|f|^2 \cdot |k|^2 \cdot |e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}|^2 \cdot |a_{IN}|^2 \end{aligned}$$

Si ara relacionem P_3 amb P_2 :

$$\begin{aligned} \frac{P_3}{P_2} &= |k|^2 \cdot |e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2}|^2 = |k|^2 \cdot 4 \cos^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = 1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ e^{-j\theta_1} + e^{-j\theta_2} &= e^{-j\theta_1} \cdot (1 + e^{-j(\theta_2 - \theta_1)}) = e^{-j\theta_1} \cdot e^{-j\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \left(e^{j\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} + e^{-j\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \right) = e^{-j\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \end{aligned}$$

La funció del detector en el port (2) és donar una referència del nivell de senyal incident (a_{IN}), de tal manera que pugui eliminar-se de P_3 .



c)

$$\frac{P_3}{P_2} = 1 + \cos(\beta(d_2 - d_1)) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\lambda_0}{4}\right) \Bigg|_{d_2=d_1+\frac{\lambda_0}{4}}^{\beta=\frac{2\pi}{\lambda}} = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_0}{4}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}\right)$$

d) Per a trobar una expressió lineal de la freqüència detectada f al voltant d' f_0 cal fer un desenvolupament de Taylor d'ordre 1 de l'expressió anterior al voltant d' f_0 .

$$Q(f) = \frac{P_3}{P_2} = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}\right)$$

$$Q(f_0) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$Q'(f) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f_0}$$

$$Q'(f_0) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f_0}$$

Llavors:

$$Q(f) = \frac{P_3}{P_2} \cong 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f_0} \cdot (f - f_0) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}$$

$$\frac{P_3}{P_2} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0} \longrightarrow \frac{f}{f_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P_3}{P_2} = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P_3}{P_2}$$

$$f \cong f_0 \left\{ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P_3}{P_2} \right\} = f_0$$

Aïllant f d'aquesta expressió:

$$f \cong f_0 \left\{ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P_3}{P_2} \right\}$$

Problema 2.5

Una tàctica habitual per a mesurar senyals amb un analitzador d'espectres (impedància d'entrada de 50 Ohm) sense carregar els circuits mesurats consisteix a situar un divisor de tensió resistiu entre el punt del circuit a mesurar i l'analitzador d'espectres. També podem utilitzar aquests divisors per a posar punts de test en un circuit sense modificar-ne apreciablement el comportament. Si aquests divisors es dissenyen de manera adequada carregaran el circuit a mesurar de manera similar tant si en el punt de test s'hi connecta l'analitzador d'espectres com si no. En la Fig.20 es mostra un fragment de l'esquemàtic d'una placa d'avaluació del xip HFA3683 d'Intersil. Per a poder fer un test del senyal de sortida de l'integrat UPC2745, es connecta un divisor de tensió ($R_{17}=560\Omega$, $R_{19}=56\Omega$) a la pista que comunica l'integrat amb la resta



de circuit. La sortida del divisor correspon al punt de mesura EXT_VCO, en què podem connectar un analitzador d'espectres per a mesurar un senyal proporcional en el qual està circulant des de l'integrat UPC2745 cap a la resta de circuit.

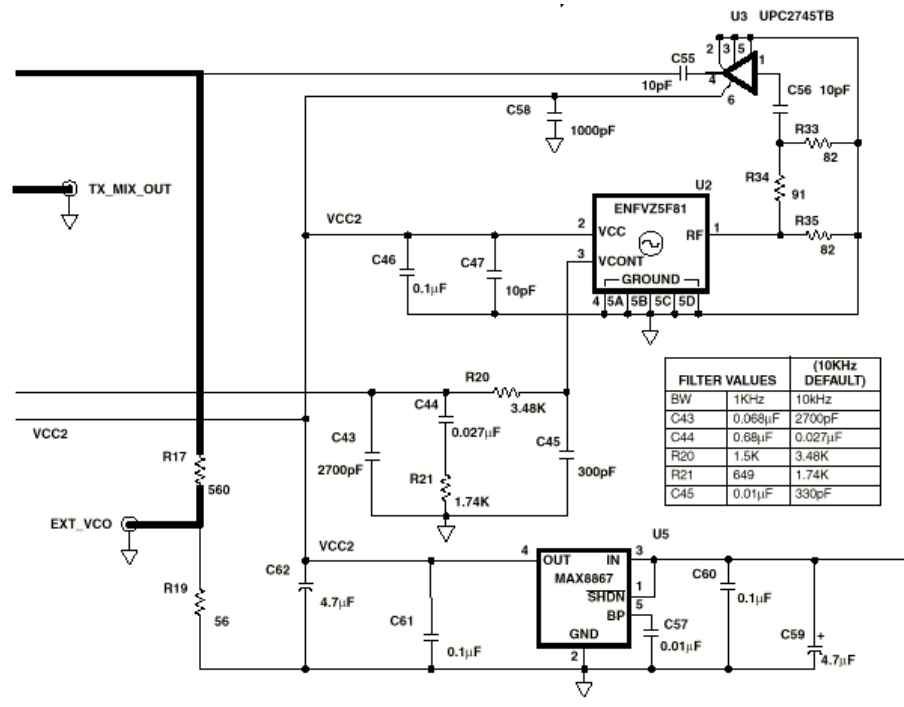


Fig. 20. Fragment de l'esquemàtic de la placa d'avaluació de l'integrat HFA3683.

Per a determinar com la presència d'aquest divisor de tensió degrada el senyal que circula sortint de UPC2745 (tant quan connectem a EXT_VCO un analitzador d'espectres com quan no), i quina atenuació sofrirà el senyal mesurat per l'analitzador d'espectres:

- (a) Calculeu els paràmetres S del circuit que es mostra en la Fig.21, que correspon aproximadament als valors de resistències del de la figura anterior si $Z_0 = 50 \Omega$. Noteu que els ports 1 i 2 corresponen als ports a través dels quals circula el senyal que s'ha de mesurar, i que el port 3 correspon al port de test, en què podem connectar un analitzador d'espectres.

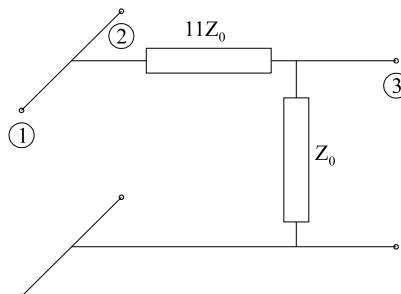


Fig. 21. Esquema del divisor de tensió.

- (b) Calculeu la relació b_2/a_1 en la configuració de la Fig.22 tant quan tenim l'analitzador d'espectres connectat (port 3 carregat amb la impedància d'entrada de l'analitzador (50Ω)) com quan no (port 3 en



circuit obert). Queda justificada l'elecció d'aquest circuit per a realitzar punts de test de senyals? Quina atenuació sofrirà el senyal mesurat per l'analitzador d'espectres respecte del que circula entre els ports 1 i 2?.

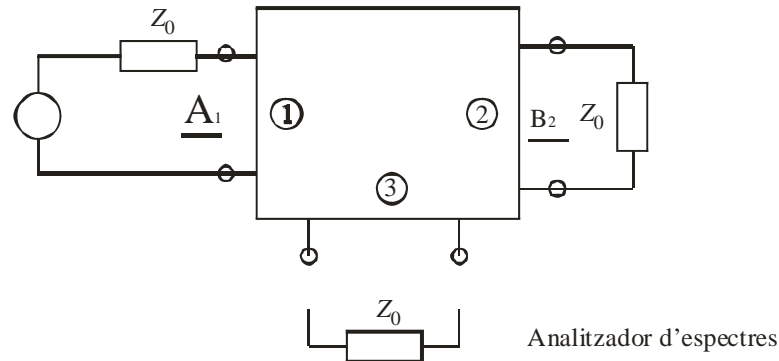


Fig. 22. Configuració de mesura.

Resolució problema 2.5

- a) Comencem a calcular els paràmetres S_{11} del circuit de l'enunciat. Per tant, carreguem tots els ports que no són l'1 amb la seva impedància de referència. Hem de calcular la impedància d'entrada del port 1 en aquestes condicions, i les relacions entre les tensions de V_2/V_1 i V_3/V_1 , per a poder calcular els paràmetres S. De la simetria del circuit se'n desprèn que $S_{11}=S_{22}$ i que $S_{32}=S_{31}$.

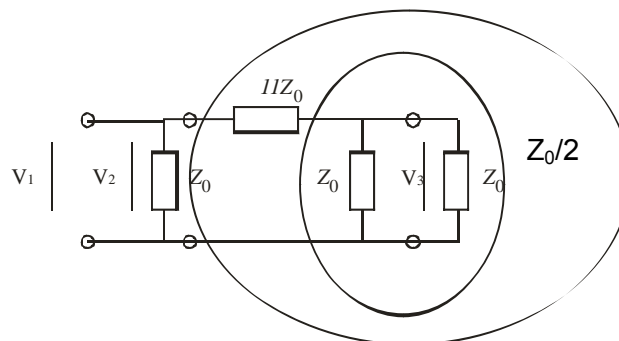


Fig. 23. Càlcul dels paràmetres S_{11} .



$$Z_x = \left(11 + \frac{1}{2}\right) \cdot Z_0 = \frac{23}{2} \cdot Z_0$$

$$Z_{IN} = \frac{23}{2} \cdot Z_0 // Z_0 = \frac{\frac{23}{2} \cdot 1 \cdot Z_0}{\left(\frac{23}{2} + 1\right) \cdot Z_0} = \frac{23}{25} \cdot Z_0$$

$$S_{11} = S_{22} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} = \frac{23 - 25}{23 + 25} = \frac{-2}{48} = \frac{-1}{24}$$

$$S_{21} = S_{12} \Big|_{Z_{0i} = Z_{ij}, \forall i, j} = \frac{V_2}{V_1} \cdot (1 + S_{11}) = \frac{V_2}{V_1} \cdot 1 + S_{11} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$

$$S_{31} = S_{13} = S_{32} = S_{23} = \frac{V_3}{V_1} \cdot (1 + S_{11}) \Big|_{\substack{V_3 = \frac{Z_0}{2} \\ V_1 = \frac{11Z_0 + \frac{Z_0}{2}}{2} = \frac{22+1}{2} \cdot \frac{Z_0}{2} = \frac{1}{23} \cdot \frac{Z_0}{2}}} = \frac{1}{23} \cdot \left(1 - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{23} \cdot \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$$

Per tant, només ens resta calcular S_{33} . Per a fer-ho, carreguem tots els ports excepte el port 3 amb la seva impedància de referència.

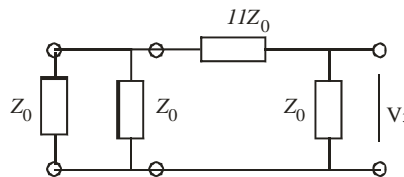


Fig. 24. Càlcul de S_{33}

Veiem que obtenim el mateix circuit elèctric que per als càlculs anteriors. Per tant, la seva impedància d'entrada serà la mateixa i, per tant, $S_{11} = S_{22} = S_{33}$. Per tant, la matriu de paràmetres S del circuit total serà:

$$S = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -1 & 23 & 1 \\ 23 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \frac{1}{24} \cdot (-a_1 + 23a_2 + a_3)$$

$$b_2 = \frac{1}{24} \cdot (23a_1 - a_2 + a_3)$$

$$b_3 = \frac{1}{24} \cdot (a_1 + a_2 - a_3)$$



b)

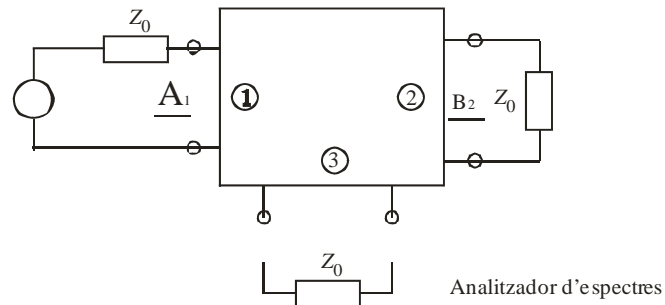


Fig. 25. Configuració de mesura

Si NO tenim connectat l'analitzador d'espectres,

$$\Gamma_3 = 1 \rightarrow b_3 = a_3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{24} \cdot (a_1 - a_3)$$

$$24a_3 = a_1 - a_3 \rightarrow 25a_3 = a_1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{25} \cdot a_1 \rightarrow b_2 = \frac{1}{24} \cdot (23a_1 + \frac{1}{25}a_1) \approx \frac{23}{24}a_1$$

Si tenim connectat l'analitzador d'espectres, llavors

$$\Gamma_3 = 0 \rightarrow \frac{b_2}{a_1} = S_{21} = \frac{23}{24}$$

Pràcticament no hi ha diferència i pràcticament $b_2 = a_1$. Per tant, NO carreguem gairebé el circuit per on passa el senyal (a_1) que volem mesurar per l'analitzador d'espectres. L'atenuació que sofrirà el senyal mesurat respecte d' a_1 serà:

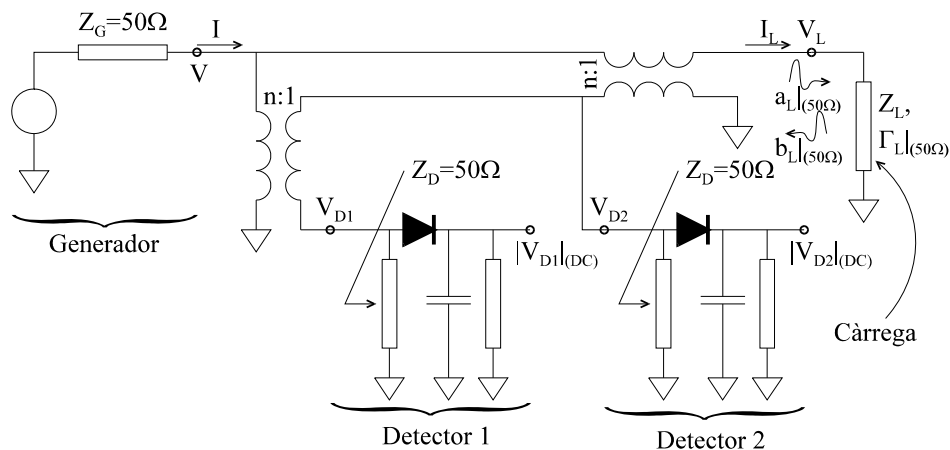
$$b_3 \Big|_{\Gamma_3=0} = S_{31} \cdot a_1 \rightarrow \text{Atenuacio} = IL = -20 \log |S_{31}| = -20 \log \left| \frac{1}{24} \right| = 27.6 \text{ dB}$$

Problemes del Tema 3

Problema 3.1

Per a monitoritzar el coeficient de reflexió (referit a 50Ω) que presenta una antena en la banda d'HF (3-30 MHz) no poden utilitzar-se circuits basats en acobladors direccionals realitzats amb línies de transmissió a causa del seu gran tamany.

Com a alternativa, pot utilitzar-se un circuit com el que es mostra en la Fig.26. Aquest circuit consta d'un quadriport format per dos transformadors, que és l'encarregat d'extreure informació dels senyals presents entre generador i càrrega, i de comunicar-la a dos detectors del voltant amb una impedància d'entrada de 50Ω .



$$V_{D1} = -\frac{1}{2n}(V - Z_D I_L) \quad V = \frac{2n^2}{2n^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2n^2} \frac{Z_D}{Z_L} \right) V_L$$

$$V_{D2} = \frac{1}{2n}(V + Z_D I_L) \quad I = \frac{2n^2 + 1}{2n^2} \left\{ 1 - \frac{2n^2}{4n^4 - 1} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{Z_L}{Z_D} \right) \right\} I_L$$

Fig. 26. Esquema d'un acoblador direccional de baixa freqüència

- (a) A la vista de les expressions que lliguen V , I , V_L i I_L , què cal exigir a la relació de transformació $n:1$ per tal que el conjunt format pels transformadors i els detectors pugui agafar mostres dels senyals presents al sistema generador-càrrega sense modificar-ne apreciablement el funcionament? Raoneu la resposta. Supposeu que $|\Gamma_L|$ **no** és proper a 1.

Suposant que es compleixi la hipòtesi feta sobre $n:1$ en l'apartat (a):

- (b) A la vista de les expressions de les tensions DC que detecten els detectors del voltant (els mòduls dels fasors dels senyals d'RF que els exciten a la



seva entrada), quina informació referent a les ones a_L i/o b_L podem extreure de $|V_{D1}|_{(DC)}$? I de $|V_{D2}|_{(DC)}$?

- (c) Quina informació sobre el coeficient de reflexió de càrrega som capaços de deduir a partir de $|V_{D1}|_{(DC)}$ i $|V_{D2}|_{(DC)}$? Com?
- (d) Podem dir que el quadriport format pels dos transformadors es comporta com un acoblador direccional? Justifiqueu la resposta enumerant els seus ports i comentant com circulen els senyals entre ells i com ho farien en un acoblador direccional ideal.

Resolució problema 3.1

- a) Si no inseríssem l'equip de mesura, el nostre sistema fóra

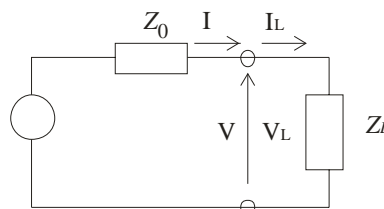


Fig. 27. Circuit sense equip de mesura

En què

$$V = V_L$$

$$I = I_L$$

Per tant, l'equip de mesura no interferirà en el sistema si garanteix que es compleixen les equacions anteriors.

Es complirà sempre que:

1. $n \gg 1$ (de fet, $n > 3$ sol ser suficient)
2. Puguem menysprear els termes

$$\frac{1}{2n^2} \cdot \frac{Z_D}{Z_L} = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{Z_0}{Z_L}$$

i

$$\frac{1}{2n^2} \cdot \frac{Z_L}{Z_D} = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{Z_L}{Z_0}$$

respecte d'1. Això implica que cal que $|Z_L|$ no sigui ni molt major ni molt menor que Z_0 . Com que

$$\left| \frac{Z_L}{Z_0} \right| = \left| \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \right|$$

si $|\Gamma_L|$ no és molt proper a 1 llavors es compleix.



b) Els detectors detectaran:

D1:

$$|V_{D1}| = \left| -\frac{1}{2n}(V - Z_D \cdot I_L) \right| \underset{\substack{Z_D=Z_0 \\ V_L \approx V_0}}{\uparrow} \frac{1}{2n} |V_L - Z_o \cdot I_L|$$

D2:

$$|V_{D2}| = \left| \frac{1}{2n}(V + Z_D \cdot I_L) \right| \underset{\substack{Z_D=Z_0 \\ V_L \approx V_0}}{\uparrow} \frac{1}{2n} |V_L + Z_o \cdot I_L|$$

Les ones normalitzades de tensió a la càrrega es relacionen amb les tensions i corrents:

$$a_L \equiv \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(V + Z_o \cdot I_L)$$

$$b_L \equiv \frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(V - Z_o \cdot I_L)$$

Per tant, els detectors detectaran tensions proporcionals a a_L i b_L .

$$D1 \rightarrow |V_{D1}| = k \cdot |b_L|$$

$$D2 \rightarrow |V_{D2}| = k \cdot |a_L|$$

c) Per tant, podem extreure informació de $|\Gamma_L|$ referenciat a 50Ω cal fer:

$$\frac{|V_{D1}|}{|V_{D2}|} = \frac{|b_L|}{|a_L|} = |\Gamma_L|$$

d)

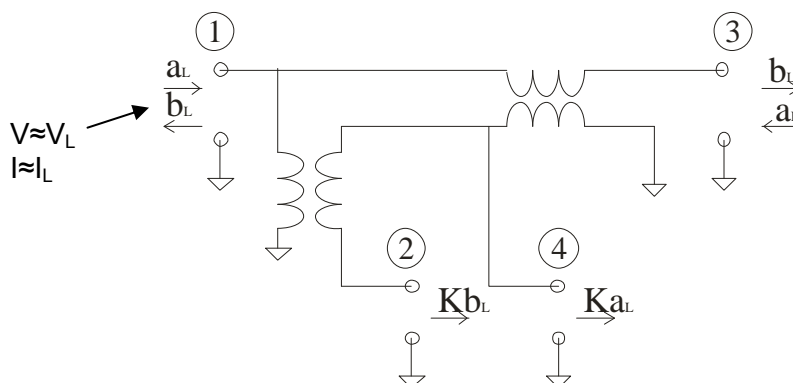


Fig. 28. Esquema amb les ones normalitzades a i b

L'ona que entra pel port 1, IN, (a_L), surt pràcticament intacta pel port 3, OUT. Una petita part en surt pel port 4 i no en surt res pel 2 (aïllat).

L'ona que entra pel port 3, IN, (b_L) surt pràcticament intacta per l'1. Una petita part en surt pel 2 (acoblat) i no en surt res pel 4 (aïllat).

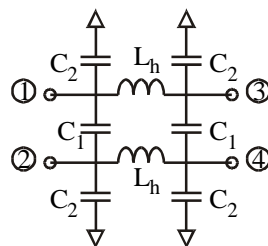


Per simetria podríem dir coses similars als senyals que entren per 4 i 2.
Es tracta d'un acoblador direccional.

Problema 3.2

En l'article *Compact Reflective-Type Phase-Shifter MMIC for C-Band Using a Lumped-Element Coupler* de F. Ellinger, R. Vogt i W Bächtold, (IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 49, no. 5, Maig 2001, pp. 913-917), s'hi descriu un desfasador variable monolític (realitzat sobre un substrat semiconductor d'AsGA) que té com a base un anell híbrid de 90° realitzat amb elements discrets (inductàncies i capacitats realitzades sobre el material semiconductor). La variació de fase s'aconsegueix controlant la capacitat que presenten uns varactors FET en funció d'una tensió de control $V_{control}$.

- 1) A partir dels valors que es donen per a inductàncies i capacitats, calculeu els paràmetres S de l'anell híbrid () en la freqüència central de disseny f_0 ($\omega_0=2\pi f_0$), respecte d'una impedància de referència Z_0 . Té el comportament ideal que esperaríem d'un anell híbrid?



$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 Z_0}$$

$$L_h = \frac{Z_0}{\omega_0 \sqrt{2}}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega_0 Z_0}$$

Fig. 17. Anell Híbrid de 90° amb components discrets.

- 2) Analitzeu a continuació el comportament de l'anell quan connectem dos varactors FET en els seus ports 3 i 4 (Fig. 18). Els varactors FET poden modelar-se com una capacitat variable C_V en sèrie amb una petita resistència de valor $R_V \ll Z_0$.

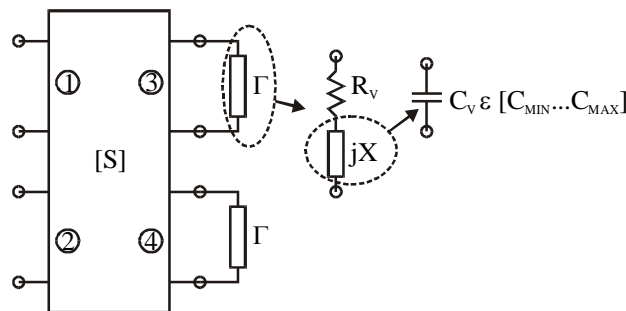


Fig. 18. Esquema del desfasador.

- a) Calculeu els paràmetres S del circuit resultant. Deixeu el resultat en funció d'un coeficient de reflexió, referit a Z_0 , dels varactors Γ (no substituïu el valors R_V i C_V). Suposeu que la matriu de paràmetres S de l'anell híbrid és:



$$S = \frac{e^{j\theta}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Quin serà el desfasatge entre una ona incident al port 1 (a_1) i l'ona sortint pel port 2 (b_2). Deixeu el resultat en funció de Γ . Com afectarà el comportament del sistema $|\Gamma|$?
- c) Si la impedància que carreguem als ports 3 i 4 és capacitiva ($X < 0$), podent tenir una component resistiva $R_V \ll Z_0$, aleshores es demostra que la màxima diferència de fase (diferència entre els desfasatges màxims i mínims que podem ocasionar en l'ona b_2) que podem aconseguir variant els valors d'aquesta reactància entre els seus valors mínim X_{MIN} i màxim X_{MAX} és de:

$$\Delta\varphi = 2(\arctg(|\bar{X}_{\text{MAX}}|) - \arctg(|\bar{X}_{\text{MIN}}|)) \quad \bar{X} = \frac{X}{Z_0}$$

Per al cas dels varactors FET, $X_{\text{MIN}} = -(\omega_0 C_{\text{MAX}})^{-1}$ i $X_{\text{MAX}} = -(\omega_0 C_{\text{MIN}})^{-1}$.

Demostreu que podem millorar la màxima diferència de fase connectant en sèrie amb el varactor FET una inductància L (Fig.). Tenint en compte que la fórmula anterior és en principi només vàlida per a reactàncies negatives, quin és valor d' L que fa maximitzar la màxima diferència de fase?

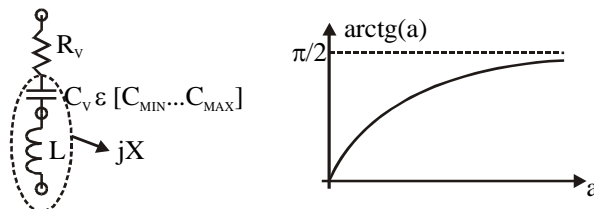
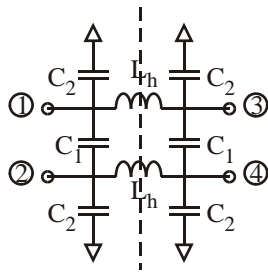


Fig. 19. Varactor amb inductància sèrie i funció $\arctg(a)$.

Resolució del problema 3.2

- 1) Donada la simetria del circuit, per resoldre el problema farem ús de la descomposició en mode parell i senar. Per fer-ho, ens servirem dels següents càlculs:



$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 Z_0} \Rightarrow Y_1 = jB_1 = j\omega_0 C_1 = j \frac{1}{Z_0} \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{Y_1} = -jZ_0$$

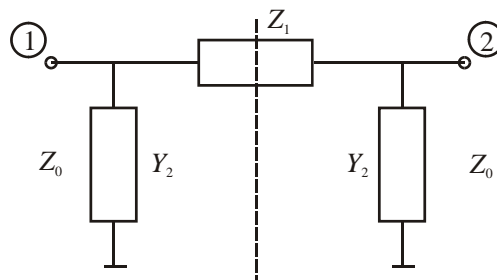
$$L_h = \frac{Z_0}{\omega_0 \sqrt{2}} \Rightarrow Z = j\omega_0 L = j \frac{Z_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow Y = -j \frac{\sqrt{2}}{Z_0}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L} - C_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 Z_0} - \frac{1}{\omega_0 Z_0} = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega_0 Z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_2 = j\omega_0 C_2 = j \frac{\sqrt{2}-1}{Z_0} \Rightarrow Z_L = -j \frac{Z_0}{\sqrt{2}-1}$$

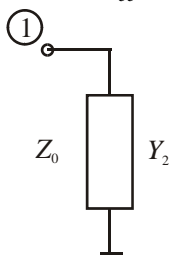
A continuació procedim a realitzar la descomposició en mode parell i senar.

(i) MODE PARELL (S_e)



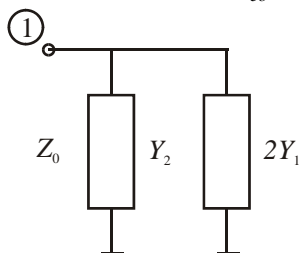
Com que el circuit torna a ser simètric, tornem a aplicar la descomposició en mode parell i senar tot separant ambdues parts pel pla de simetria mostrat.

(i.1) Mode parell (Γ_{ee})



$$\Gamma_{ee} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{\frac{1}{Y_2} - \frac{1}{Y_0}}{\frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_0}} = \frac{Y_0 - Y_2}{Y_0 + Y_2} = \frac{1 - j(\sqrt{2}-1)}{1 + j(\sqrt{2}-1)}$$

(i.2) Mode senar (Γ_{eo})



$$\Gamma_{eo} = \frac{Y_0 - (Y_2 + 2Y_1)}{Y_0 + (Y_2 + 2Y_1)} = \frac{1 - j(\sqrt{2}-1+2)}{1 + j(\sqrt{2}-1+2)} = \frac{1 - j(\sqrt{2}+1)}{1 + j(\sqrt{2}+1)}$$



Si ara unim els resultats dels dos subapartats anteriors trobem la matriu de paràmetres S de la descomposició en mode parell del circuit original. Per fer-ho, només ens cal aplicar la fórmula:

$$S_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{ee} + \Gamma_{eo} & \Gamma_{ee} - \Gamma_{eo} \\ \Gamma_{ee} - \Gamma_{eo} & \Gamma_{ee} + \Gamma_{eo} \end{bmatrix}$$

Per poder aplicar-la, però, primer hem de trobar $\Gamma_{ee} + \Gamma_{eo}$ i $\Gamma_{ee} - \Gamma_{eo}$:

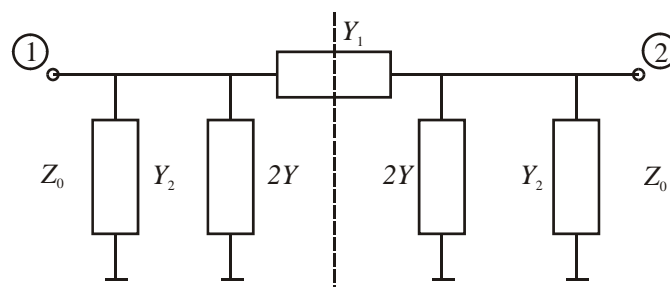
$$\begin{aligned} \Gamma_{ee} + \Gamma_{eo} &= \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1)}{1 + j(\sqrt{2} - 1)} + \frac{1 - j(\sqrt{2} + 1)}{1 + j(\sqrt{2} + 1)} = \\ &= \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1) - j(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) + 1 - j(\sqrt{2} + 1) + j(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{1 + j(\sqrt{2} + 1) + j(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \\ &= \frac{2 + 2(2 - 1)}{1 + 2j\sqrt{2} - (2 + 1)} = \frac{4}{2j\sqrt{2} - 3} = -j \frac{2}{\sqrt{2}} = -j\sqrt{2} \\ \Gamma_{ee} - \Gamma_{eo} &= \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1)}{1 + j(\sqrt{2} - 1)} - \frac{1 - j(\sqrt{2} + 1)}{1 + j(\sqrt{2} + 1)} = \\ &= \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1) - j(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 1 + j(\sqrt{2} + 1) - j(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{2j\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2j + 2j}{2j\sqrt{2}} = \frac{4j}{2j\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Per tant:

$$S_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -j\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -j\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}$$

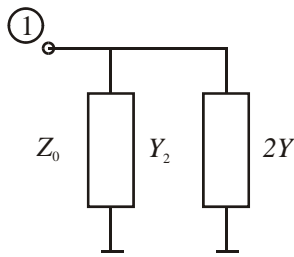
(ii) MODE SENAR (S_o)

Continuem ara a partir de la primera descomposició, la del circuit original, per fer ara l'estudi del mode senar.



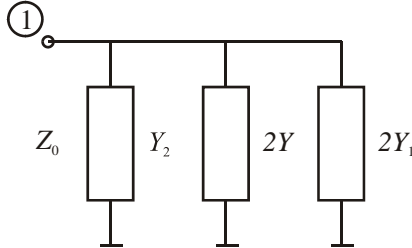
Igual que abans, procedim a realitzar de nou la descomposició gràcies a la simetria que presenta aquest subcircuit.

(ii.1) Mode parell (Γ_{oe})



$$\Gamma_{oe} = \frac{Y_0 - (Y_2 + 2Y)}{Y_0 + (Y_2 + 2Y)} = \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1) + j2\sqrt{2}}{1 + j(\sqrt{2} - 1) - j2\sqrt{2}} = \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1)}{1 - j(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\Gamma_{eo}}$$

(ii.2) Mode senar (Γ_{oo})



$$\Gamma_{oo} = \frac{Y_0 - (Y_2 + 2Y)}{Y_0 + (Y_2 + 2Y)} = \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1) + j2\sqrt{2}}{1 + j(\sqrt{2} - 1) + j2\sqrt{2}} = \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1)}{1 - j(\sqrt{2} + 1)} = -1$$

Per tant, si unim els resultats parcials trobats fins ara podem escriure la matriu de paràmetres S final com:

$$S_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{oe} + \Gamma_{oo} & \Gamma_{oe} - \Gamma_{oo} \\ \Gamma_{oe} - \Gamma_{oo} & \Gamma_{oe} + \Gamma_{oo} \end{bmatrix}$$

Per omplir-la, igual que abans, primer hem de trobar la suma i la resta dels coeficients de reflexió normalitzats Γ_{oe} i Γ_{oo} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{oe} + \Gamma_{oo} &= \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1)}{1 - j(\sqrt{2} + 1)} + \frac{1 + j(\sqrt{2} - 1)}{1 - j(\sqrt{2} - 1)} = \\ &= \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1) + j(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + 1 + j(\sqrt{2} - 1) - j(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{1 - j(\sqrt{2} - 1) - j(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \\ &= \frac{2 + 2(2 - 1)}{-j2\sqrt{2}} = \frac{4}{-j2\sqrt{2}} = j\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{oe} - \Gamma_{oo} &= \frac{1 + j(\sqrt{2} + 1)}{1 - j(\sqrt{2} + 1)} - \frac{1 + j(\sqrt{2} - 1)}{1 - j(\sqrt{2} - 1)} = \\ &= \frac{1 - j(\sqrt{2} - 1) + j(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) - 1 - j(\sqrt{2} - 1) + j(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{-j2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2j + 2j}{-j2\sqrt{2}} = \frac{4j}{-j2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Si ara escrivim la matriu S:

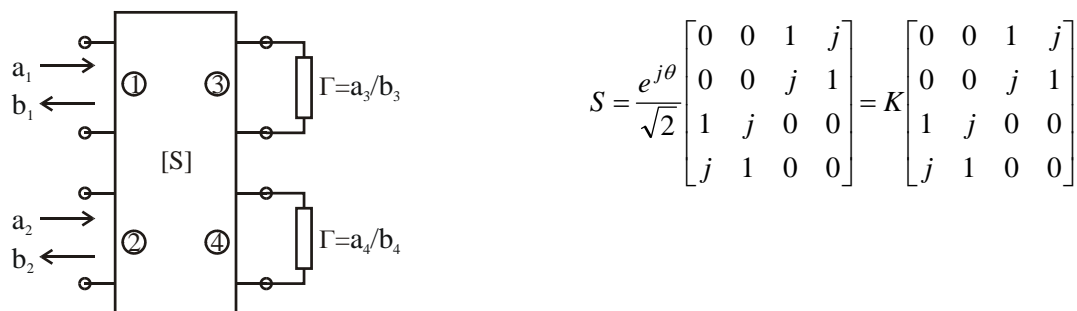
$$S_o = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} j\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & j\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j & -1 \\ -1 & j \end{bmatrix} = -S_e$$



Per últim, ajuntant els resultats parcials de les dues descomposicions trobem la matriu de paràmetres S final com:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_e + S_o & S_e - S_o \\ S_e - S_o & S_e + S_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2S_e \\ 2S_e & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -j & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Per resoldre el segon apartat partim de l'esquema següent:



(a) Explicitem les equacions i resollem:

$$\begin{aligned} b_1 &= K(a_3 + ja_4) = K\Gamma(b_3 + jb_4) \\ b_2 &= K(ja_3 + a_4) = K\Gamma(jb_3 + b_4) \\ b_3 &= K(a_1 + ja_2) \\ b_4 &= K(ja_1 + a_2) \end{aligned}$$

Si substituïm b_3 i b_4 a les dues primeres expressions trobem:

$$\begin{aligned} b_1 &= K(a_3 + ja_4) = K\Gamma(b_3 + jb_4) = K^2\Gamma(a_1 + ja_2 + j^2a_1 + ja_2) = j2K^2\Gamma a_2 = je^{j2\theta}\Gamma a_2 \\ b_2 &= K(ja_3 + a_4) = K\Gamma(jb_3 + b_4) = K^2\Gamma(ja_1 + j^2a_2 + ja_1 + a_2) = j2K^2\Gamma a_1 = je^{j2\theta}\Gamma a_1 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = je^{j2\theta}\Gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

(b) El desfasament vindrà controlat per la fase d' S_{21} :

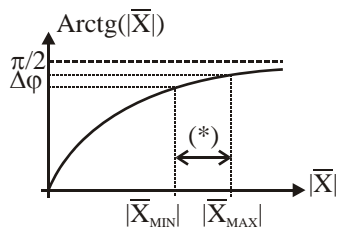
$$S_{21} = je^{j2\theta}\Gamma = |\Gamma| e^{j(\frac{\pi}{2} + 2\theta + \arg(\Gamma))}$$

Veiem que el desfasament és $\frac{\pi}{2} + 2\theta + \arg(\Gamma)$, depèn de Γ , i que per tant si variem aquest paràmetre podem variar la fase.



El mòdul de Γ , $|\Gamma|$, ens atenuarà l'ona b_2 respecte d' a_1 . Això provoca, si és menor que 1, pèrdues.

- (c) Per als varactors fets sense bobina la distància (*) ve controlada per C_{MAX} i C_{MIN} , característiques del varactor. Si aconseguíssim moure $|\bar{X}_{MIN}|$ i $|\bar{X}_{MAX}|$ cap a l'esquerra, però, ens situaríem en una zona de més pendent de l'arctg i tindríem més $\Delta\varphi$.



$$|\bar{X}_{MIN}| = |-(\omega_0 Z_0 C_{MAX})^{-1}|$$

$$|\bar{X}_{MAX}| = |-(\omega_0 Z_0 C_{MIN})^{-1}|$$

Això ho podem fer afegint una inductància sèrie al FET:

$$X' = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_v} \Rightarrow X'_{MIN} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_{MAX}}$$

$$X'_{MIN} = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C_{MAX}}$$



Problemes del Tema 5

Problema 5.1

Sigui un transistor de microones els paràmetres S del qual i de soroll, a la freqüència d'interès, són:

$$S = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 3.5 & -0.4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} F_{MIN} &= 1.5dB \\ \Gamma_{OPT} &= 0.6 \\ R_n &= 30\Omega \end{aligned}$$

Amb aquest transistor es vol realitzar un amplificador amb l'estructura que es mostra en la Fig. 20.

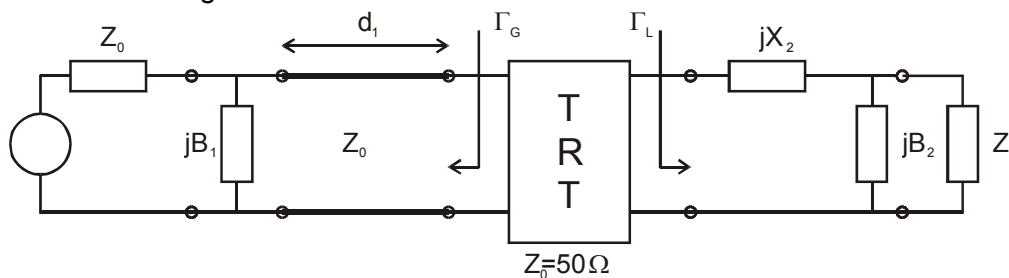


Fig. 20. Esquema de l'amplificador.

- Discutiu l'estabilitat del transistor.
- És unilateral? Trobeu Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i un guany de transferència al més compatible possible amb el mínim soroll. Calculeu i indiqueu la figura de soroll, el valor del guany de transferència obtingut i el guany disponible. Justifiqueu les respostes.
- Trobeu els paràmetres de la xarxa d'adaptació d'entrada (d_1 , B_1) de l'amplificador per al cas de l'apartat (b).
- Si el generador té una font de tensió interna d'amplitud (de pic) $|V_G|=1V$, amb les condicions de l'apartat (c), calculeu la potència associada a l'ona progressiva que incideix en la càrrega Z_L (considerant $Z_0 \in \mathfrak{R}$).

Resolució del problema 5.1

(a) Hem de discutir l'estabilitat del transistor.
Sabem que el transistor serà incondicionalment estable si compleix amb:



$$\text{Sistema incondicionalment estable} \Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}| < 1 & \text{i} \\ |S_{22}| < 1 & \text{i} \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| < 1 & \text{i} \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} > 1 \end{cases}$$

Per tant, si ho comprovem:

$$\begin{cases} |S_{11}| = 0.3 < 1 \\ |S_{22}| = 0.4 < 1 \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = |-0.29| < 1 \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} = 2.3915 > 1 \end{cases}$$

Per tant, com que es compleixen totes les condicions, és incondicionalment estable.

- (b) En aquest apartat ens demanen si és unilateral i que trobem Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i un guany de transferència al més compatible possible amb el mínim soroll. A més a més, ens demanen que calculem/indiquem la figura de soroll, el valor del guany de transferència obtingut i el guany disponible.

Anem pas per pas.

És unilateral?

Si sabem que per poder-lo considerar com a tal ha de complir que:

$$|S_{12}S_{21}| \ll 1$$

Si ho comprovem, observem que:

$$|S_{12}S_{21}| = 3.5 \cdot 0.05 = 0.175 \text{ que no és gaire més petit que } 1.$$

Per tant, l'amplificador no és unilateral.

Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i un guany de transferència al més compatible possible amb el mínim soroll

Per tal que tingui el mínim soroll, necessitem que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6$. Per tant, el coeficient de reflexió a l'entrada Γ_G ja el tenim fixat.

Per aconseguir el màxim guany possible ara, l'única cosa que podem fer és que a la sortida de l'amplificador tinguem $\Gamma_L^* = \Gamma_O$, per tant:

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G} \Bigg|_{\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6} = \dots = -0.272$$

Figura de soroll?



Com que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6$, llavors la figura de soroll és la de l'enunciat:

$$F_{MIN} = 1.5dB$$

Guany de transferència que tenim sota aquestes condicions?

Sabem que el guany de transferència respon a la següent equació:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_G)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_L|^2}$$

Per tant, si substituïm per:

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6$$

$$\Gamma_L = -0.272$$

Tenim:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_{OPT}|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_{OPT})(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_{OPT}\Gamma_L|^2} = 12.5909$$

Guany disponible (G_A)?

Com ja sabem, les definicions del guany de transferència i del guany disponible són:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} \quad G_A = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}}$$

Per tant, si observem atentament, en el cas que a la sortida del nostre amplificador tinguem adaptació conjugada (com és el cas), tots dos guanys són equivalents, per tant,

$$G_A = G_T = 12.5909$$

- (c) Hem de trobar els paràmetres de la xarxa d'adaptació d'entrada (d_1 , B_1) de l'amplificador per al cas de l'apartat anterior.

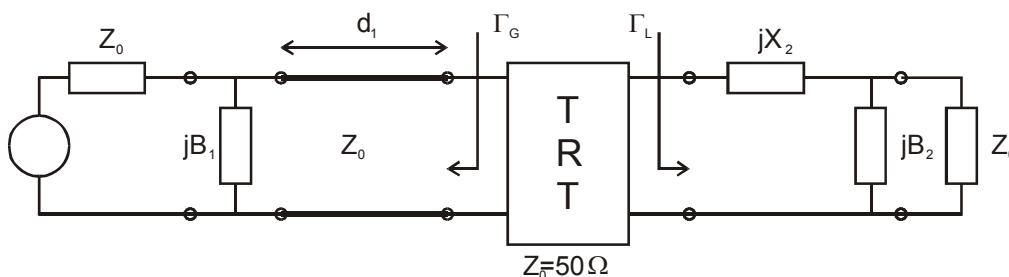


Fig. 21. Esquema de l'amplificador.

Tenim que

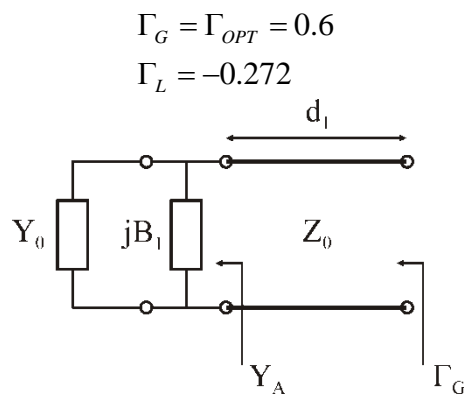


Fig. 22. Xarxa d'entrada vista cap al generador.

Tractem jB_1 i Z_0 en la carta de Smith d'admitàncies i per tant,

$$Y_A = Y_0 + jB_1 \Rightarrow \bar{Y}_A = 1 + j\bar{B}_1$$

que representa un cercle en la carta de Smith.

Ara hem de passar $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6$ en la carta d'admitàncies i buscar el punt de creuament amb el cercle anterior ($\bar{Y}_A = 1 + j\bar{B}_1$), movent aquest $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.6$ situat en la carta d'admitàncies, cap a càrrega.

Veiem que es creuen en 2 punts:

$$\bar{Y}_{A1} = 1 + j1.5$$

$$\bar{Y}_{A2} = 1 - j1.5$$

Mirant la distància (representada en fraccions de longitud d'ona) en l'exterior de la carta de Smith, trobem la longitud $l_1 = 0.176$ del stub (en fraccions de longitud d'ona) pel primer cas, i una longitud $l_2 = 0.324$ pel segon cas.

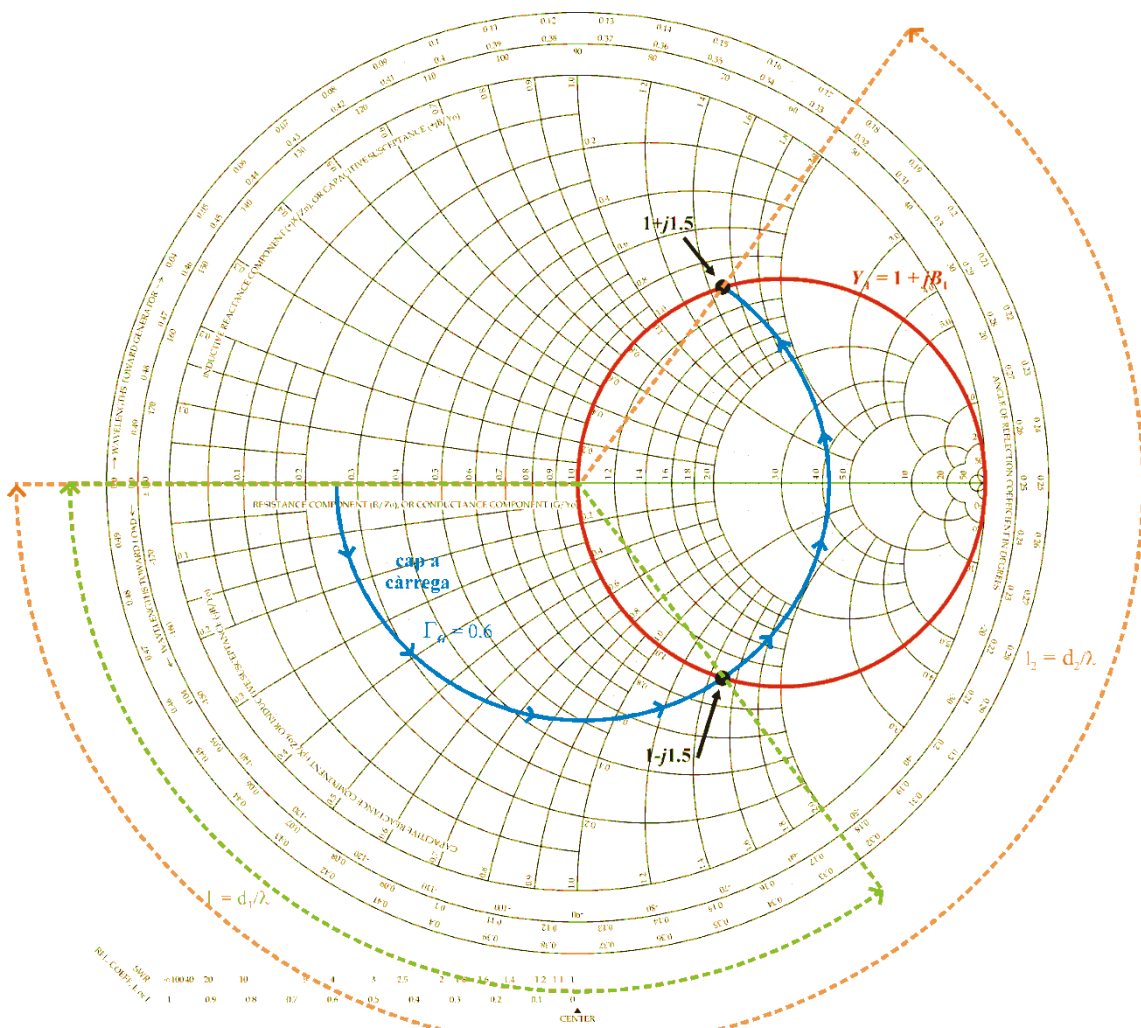


Fig. 23. Adaptació de l'entrada.

Si el generador té una font de tensió interna d'amplitud (de pic) $|V_G|=1V$, amb les condicions de l'apartat (c), hem de calcular la potència associada a l'ona progressiva que incideix en la càrrega Z_L (considerant $Z_0 \in \mathcal{R}$).

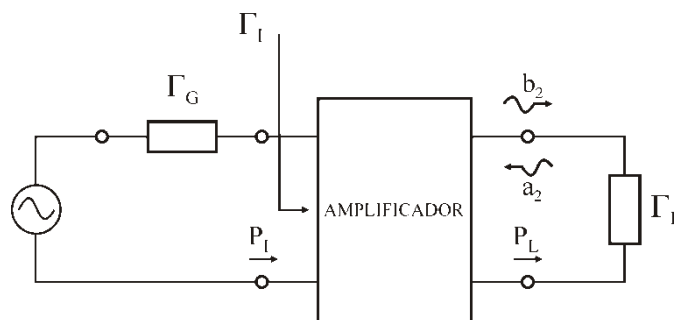


Fig. 24. Esquema de l'amplificador (TRT amb les seves xarxes d'adaptació) connectat al generador i a la càrrega.



Hem de tenir present que tenim l'amplificador muntat amb les seves xarxes d'adaptació a l'entrada i a la sortida corresponents i que per tant (considerant $Z_o \in \mathfrak{R}$):

$$G_T \max = 12.5909$$

$$\Gamma_g = 0 \quad (Z_g = 50\Omega)$$

$$\Gamma_{L\text{càrrega}} = 0 \quad (Z_g = 50\Omega)$$

Hem de tenir present però, que $\Gamma_g = 0 \neq \Gamma_{I\text{ xarxa}}$ perquè encara que tinguem la xarxa d'adaptació a l'entrada, no és així entre la xarxa i el TRT. Llavors no tenim màxima transferència de potència, perquè en l'apartat b vam buscar tenir el mínim soroll ($\Gamma_{G\text{ xarxa}} = \Gamma_{OPT} = 0.6 \neq \Gamma_{I\text{ TRT}}^*$). Però aquest fet no ens afectarà els càlculs, perquè farem servir G_T , que depèn de $P_{av,g}$, que considera $\Gamma_g = 0 = \Gamma_{I\text{ xarxa}}$.

Com que ens demanen la potència associada a l'ona progressiva que incideix sobre la càrrega i que aquesta està adaptada $\Gamma_{L\text{ càrrega}} = 0$:

Això implica que:

$$P_L = P_L^+ - P_L^- = \frac{1}{2}|b|^2 - \frac{1}{2}|a|^2 = \{\Gamma_{L\text{ càrrega}} = 0\} = P_L^+ = \frac{1}{2}|b|^2 = G_T \cdot P_{av,g}$$

És a dir:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} = \frac{P_L^+}{P_{av,g}}$$

Ara, pel càlcul de $P_{av,g}$, tenim el següent esquema:

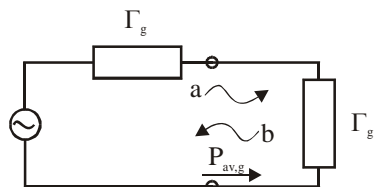


Fig. 25. Esquema d'ones a l'entrada de l'amplificador.

En què recordem que gràcies que estem calculant $P_{av,g}$ considerem que tenim

$\Gamma_g = \Gamma_g^* = \Gamma_{I\text{ xarxa}}^* = 0$ (considerant $Z_o \in \mathfrak{R}$).

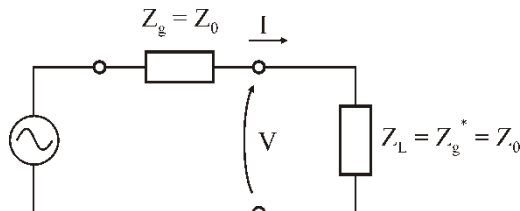


Fig. 26. Esquema d'impedàncies a l'entrada de l'amplificador.

Per tant,

$$P_{av,g} = \frac{1}{2} \text{Re}[VI^*] = \frac{1}{2} \text{Re}\left[\frac{Vg}{2} \frac{Vg^*}{2Z_o}\right] = \frac{1}{8} \frac{|Vg|^2}{Z_o} = \frac{1}{8 \cdot 50} = 2.5mW$$



Per tant, la potència final que cau sobre la càrrega és de:

$$P_L = P_L^+ = G_T \cdot P_{av,g} = 12.5909 \cdot 0.0025 = 31.48mW$$

Problema 5.2

Sigui un transistor de microones els paràmetres S del qual i de soroll, a la freqüència d'interès, són:

$$S|_{Z_0=50\Omega} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ 2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{OPT} = 0.3 \quad F_{MIN} = 1.1 \quad R_n = 20\Omega$$

Amb aquest transistor es vol realitzar un amplificador amb l'estructura que es mostra en la Fig. 27.

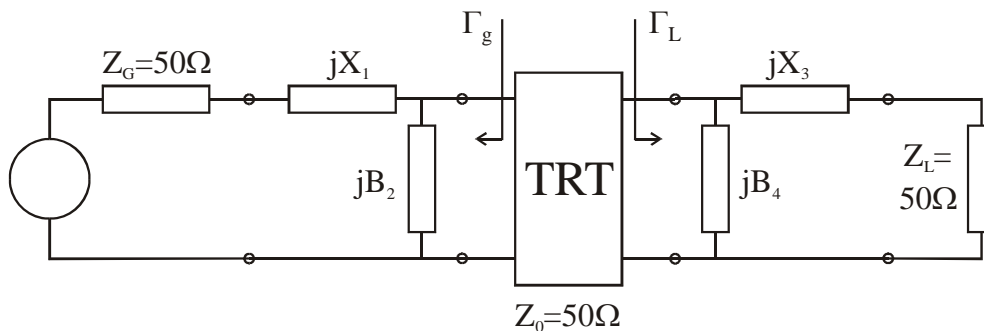


Fig. 27. Amplificador de microones del problema 2.

- Discuti l'estabilitat del transistor.
- Trobeu els valors de Γ_g i de Γ_L que fan que l'amplificador sigui estable, amb soroll mínim i amb un guany de transferència al més compatible possible amb la restricció de mínim soroll.
- Trobeu el màxim guany de transferència que pot oferir aquest amplificador funcionant de manera estable, i trobeu (resolent el sistema d'equacions pertinent) els valors de Γ_g i de Γ_L que l'aconsegueixen. Trobeu el factor de soroll en aquest cas.
- Per als valors de Γ_g i de Γ_L de l'apartat (b), trobeu els valors de X_1 , B_2 , X_3 i B_4 .

Resolució del problema 5.2

(a) Hem de discutir l'estabilitat del transistor.
Sabem que el transistor serà incondicionalment estable si compleix amb:



$$\text{Sistema incondicionalment estable} \Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}| < 1 & \text{i} \\ |S_{22}| < 1 & \text{i} \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| < 1 & \text{i} \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} > 1 \end{cases}$$

Per tant, si ho comprovem:

$$\begin{cases} |S_{11}| = 0.5 < 1 \\ |S_{22}| = 0.4 < 1 \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = |-0.8| < 1 \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} = 1.025 > 1 \end{cases}$$

Per tant, com que es compleixen totes les condicions, és incondicionalment estable.

- (b) En aquest apartat ens demanen que trobem Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i un guany de transferència al més compatible possible amb el mínim soroll.

Per tal que tingui el mínim soroll, $F_{MIN} = 1.1$, necessitem que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$. Per tant, el coeficient de reflexió a l'entrada Γ_G , ja el tenim fixat.

Per aconseguir el màxim guany possible ara, l'única cosa que podem fer és que a la sortida de l'amplificador tinguem $\Gamma_L^* = \Gamma_O$, per tant:

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G} \Big|_{\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3} = \dots = 0.556$$

Guany de transferència que tenim sota aquestes condicions?

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$$

$$\Gamma_L = 0.556$$

Sabem que el guany de transferència respon a la següent equació:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_G)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_L|^2}$$

Per tant, si substituïm tenim:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_{OPT}|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_{OPT})(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_{OPT}\Gamma_L|^2} = 3.98 \Rightarrow 6dB$$

- (c) Ens demanen que trobem el màxim guany de transferència que pot oferir aquest amplificador funcionant de manera estable, i que trobem (resolent el



sistema d'equacions pertinent) els valors de Γ_G i de Γ_L que l'aconsegueixen. A més a més, haurem de trobar el factor de soroll per a aquest cas.

Màxim guany de transferència:

El màxim guany de transferència que ens pot oferir, com que l'amplificador (tal com hem vist al primer apartat) és incondicionalment estable, serà:

$$G_T \text{ max} = \text{MAG} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|} \left(K - \sqrt{K^2 - 1} \right) = 5.33$$

Valors de Γ_G i de Γ_L per aconseguir MAG:

Per aconseguir el màxim guany de transferència sabem que s'ha de complir que

$$\Gamma_g^* = \Gamma_I = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = f(\Gamma_L)$$

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g} = f(\Gamma_g)$$

I com que el transistor NO és unilateral ($|S_{12}S_{21}| = 0.6$ que no és molt més petit que 1) no podem fer la simplificació:

$$\Gamma_g^* = \Gamma_I = S_{11}$$

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22}$$

En aquest sistema d'equacions, com que tots el paràmetres S són reals, Γ_G i de Γ_L també ho seran i per tant tenim un sistema de equacions amb dues incògnites, que en resoldre'l surt:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_g^* = \Gamma_I = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = f(\Gamma_L) \\ \Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g} = f(\Gamma_g) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Gamma_G^* = \Gamma_I = -0.5 \\ \Gamma_L^* = \Gamma_O = 0 \end{aligned}$$

Si calculéssim ara G_T max sota aquestes condicions, veurem que sortirà el mateix que MAG:

$$G_T \text{ max} = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_G)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_L|^2} = 5.33$$

Factor de soroll per a aquest cas

Ja no estem en condicions de $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$, ja que $\Gamma_G = -0.5$, per tant, hem d'agafar la següent fórmula per calcular el factor de soroll:

$$F = F_{\min} + 4 \frac{R_n}{Z_0} \frac{|\Gamma_G - \Gamma_{G0}|^2}{(1 - |\Gamma_G|^2) |1 + \Gamma_{G0}|^2}$$



En què, substituint, tenim:

$$F = 1.1 + 4 \frac{20}{50} \frac{|-0.5 - 0.3|^2}{(1 - |0.5|^2) |1 + 0.3|^2} = 1.907$$

(d) Ara, per als valors de Γ_G i de Γ_L de l'apartat (b), trobeu els valors de X_1 , B_2 , X_3 i B_4 .

Els valors de Γ_G i de Γ_L de l'apart b són:

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$$

$$\Gamma_L = 0.556$$

Calcularem les xarxes d'adaptació per parts (primer a l'entrada i després a la sortida):

Xarxa d'adaptació a l'entrada:

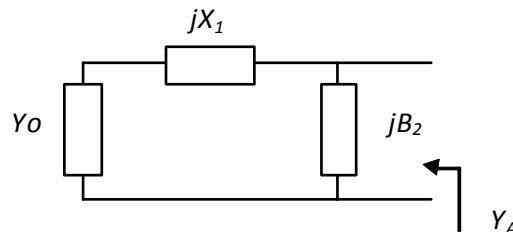


Fig. 28. Xarxa d'adaptació de l'entrada. Vista cap a l'entrada.

Primer de tot, calcularem l'admitància d'entrada Y_A

$$Y_A = \frac{1}{Z_o + jX_1} + jB_2 = \frac{50 - jX_1}{50^2 + X_1^2} + jB_2 = \frac{50}{50^2 + X_1^2} + j \left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2 \right)$$

Per una altra banda sabem que l'admitància que volem veure és:

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3 \Rightarrow Y_A = Y_o \frac{1 - \Gamma_G}{1 + \Gamma_G} = 0.01077$$

Per tant, si igualem totes dues expressions tenim que:

$$\frac{50}{50^2 + X_1^2} + j \left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2 \right) = 0.01077$$

Per tant,

$$\left. \begin{aligned} \frac{50}{50^2 + X_1^2} = 0.01077 &\Rightarrow X_1 = \pm 46.28 \\ j \left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2 \right) = 0 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_2 = \pm 0.00997$$



Xarxa d'adaptació a la sortida:

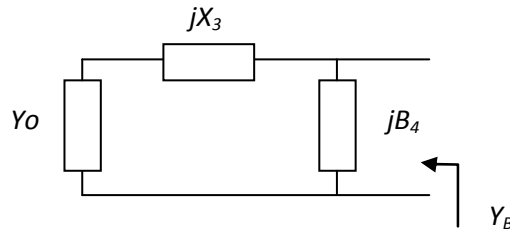


Fig. 29. Xarxa d'adaptació de sortida. Vista cap a la sortida.

Primer de tot, calcularem l'admitància d'entrada Y_B

$$Y_B = \frac{1}{Z_0 + jX_3} + jB_4 = \frac{50 - jX_3}{50^2 + X_3^2} + jB_4 = \frac{50}{50^2 + X_3^2} + j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right)$$

Per una altra banda sabem que l'admitància que volem veure és:

$$\Gamma_L = 0.556 \Rightarrow Y_B = Y_0 \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} = 0.005707$$

Per tant, si igualem totes dues expressions tenim que:

$$\frac{50}{50^2 + X_3^2} + j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right) = 0.005707$$

Per tant,

$$\left. \begin{aligned} \frac{50}{50^2 + X_3^2} = 0.005707 \Rightarrow X_3 = \pm 79.12 \\ j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_4 = \pm 0.00903$$

Problema 5.3

Sigui un transistor de microones els paràmetres S del qual i de soroll, a la freqüència d'interès, són :

$$S|_{Z_0=50\Omega} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{OPT} = 0.3 \quad F_{MIN} = 1.1 \quad R_n = 20\Omega$$

Amb aquest transistor es vol realitzar un amplificador amb l'estructura que es mostra en la Fig. 30.

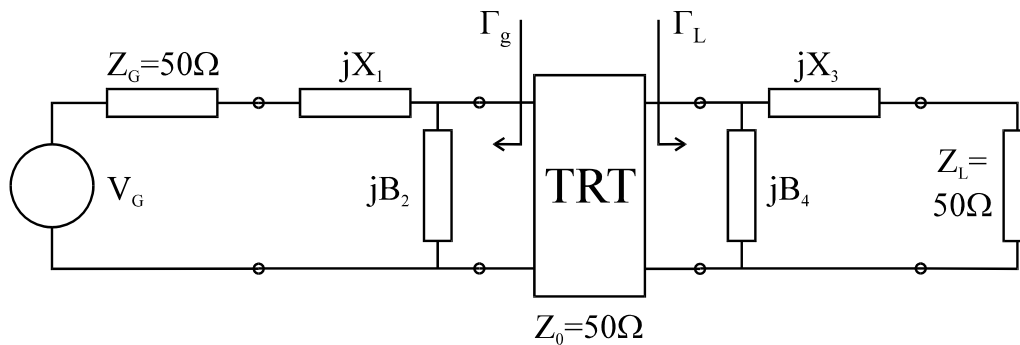


Fig. 30. Amplificador de microones del problema 3.

- Discuti l'estabilitat del transistor.
- Trobeu els valors de Γ_g i de Γ_L que fan que l'amplificador sigui estable, amb soroll mínim i amb un guany de transferència al més compatible possible amb la restricció de mínim soroll i estabilitat. Trobeu el valor del guany de transferència i del factor de soroll.
- Per als valors de Γ_g i de Γ_L de l'apartat (b), trobeu els valors de X_1 , B_2 , X_3 i B_4 . Si per a alguna xarxa no és possible fer l'adaptació, modifiqueu-la de tal manera que continuï sent només de dos elements reactius i permeti l'adaptació d'impedàncies.
- Si el generador té una font de tensió interna d'amplitud (de pic) $|V_G|=1V$, calculeu la potència associada a l'ona progressiva que incideix en la càrrega Z_L .

Resolució del problema 5.3

(a) Hem de discutir l'estabilitat del transistor.
Sabem que el transistor serà incondicionalment estable si compleix amb:

$$\text{Sistema incondicionalment estable} \Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}| < 1 & i \\ |S_{22}| < 1 & i \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| < 1 & i \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} > 1 \end{cases}$$



Per tant, si ho comprovem:

$$\begin{cases} |S_{11}| = 0.5 < 1 \\ |S_{22}| = 0.4 < 1 \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = |0.4| < 1 \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} = 0.625 \Rightarrow NO \acute{e}s > 1 \end{cases}$$

Per tant, com que NO es compleixen totes les condicions, NO és incondicionalment estable. ÉS POTENCIALMENT INESTABLE. S'haurà de comprovar l'estabilitat per a cada cas concret de Γ_G i de Γ_L .

- (b) En aquest apartat ens demanen que trobem Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i un guany de transferència al més compatible possible amb el mínim soroll.

Per tal que tingui el mínim soroll, $F_{MIN} = 1.1$, necessitem que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$. Per tant, el coeficient de reflexió a l'entrada Γ_G , ja el tenim fixat.

Per aconseguir el màxim guany possible ara, l'única cosa que podem fer és que a la sortida de l'amplificador tinguem $\Gamma_L^* = \Gamma_O$, per tant:

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G} \Big|_{\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3} = \dots = 0.6118 < 1 \Rightarrow estable$$

És estable a la sortida perquè el mòdul de Γ_O és més petit que 1.

Ara, mirem si també és estable l'entrada amb aquest valor de Γ_L :

$$\Gamma_I = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \Big|_{\Gamma_L = 0.6118} = 0.986 < 1 \Rightarrow estable$$

És estable a l'entrada perquè el mòdul de Γ_I és més petit que 1 sota aquestes condicions.

Quin guany de transferència tenim sota aquestes condicions?

Tenim:

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$$

$$\Gamma_L = 0.6118$$

Sabem que el guany de transferència respon a la següent equació:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_G)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_G\Gamma_L|^2}$$



Per tant, si substituïm tenim:

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_{OPT}|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_{OPT})(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_{OPT}\Gamma_L|^2} = 8.05 \Rightarrow 9.05dB$$

Factor de soroll en aquest cas:

$$F_{MIN} = 1.1, \text{ perquè } \Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3$$

(c) Ara, per als valors de Γ_G i de Γ_L de l'apartat (b), hem de trobar els valors de X_1 , B_2 , X_3 i B_4 .

Els valors de Γ_G i de Γ_L de l'apart b són:

$$\begin{aligned} \Gamma_G &= \Gamma_{OPT} = 0.3 \\ \Gamma_L &= 0.6118 \end{aligned}$$

Calcularem les xarxes d'adaptació per parts (primer a l'entrada i després a la sortida):

Xarxa d'adaptació a l'entrada:

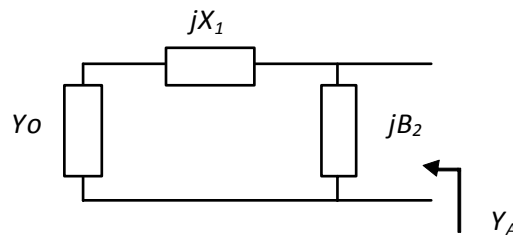


Fig. 31. Xarxa d'adaptació de l'entrada. Vista cap a l'entrada.

Primer de tot, calcularem l'admitància d'entrada Y_A

$$Y_A = \frac{1}{Z_o + jX_1} + jB_2 = \frac{50 - jX_1}{50^2 + X_1^2} + jB_2 = \frac{50}{50^2 + X_1^2} + j\left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2\right)$$

Per una altra banda sabem que l'admitància que volem veure és:

$$\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.3 \Rightarrow Y_A = Y_o \frac{1 - \Gamma_G}{1 + \Gamma_G} = 0.01077$$

Per tant, si igulem totes dues expressions tenim que:

$$\frac{50}{50^2 + X_1^2} + j\left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2\right) = 0.01077$$



Per tant,

$$\left. \begin{aligned} \frac{50}{50^2 + X_1^2} = 0.01077 &\Rightarrow X_1 = \pm 46.28 \\ j\left(\frac{-X_1}{50^2 + X_1^2} + B_2\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_2 = \pm 0.00997$$

Xarxa d'adaptació a la sortida:

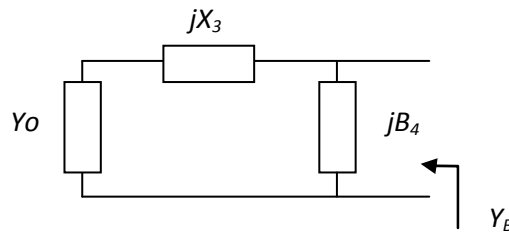


Fig. 32. Xarxa d'adaptació de sortida. Vista cap a la sortida.

Primer de tot, calculem l'admitància d'entrada Y_B

$$Y_B = \frac{1}{Z_0 + jX_3} + jB_4 = \frac{50 - jX_3}{50^2 + X_3^2} + jB_4 = \frac{50}{50^2 + X_3^2} + j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right)$$

Per una altra banda sabem que l'admitància que volem veure és:

$$\Gamma_L = 0.6118 \Rightarrow Y_B = Y_0 \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} = 0.00481$$

Per tant, si igualem totes dues expressions tenim que:

$$\frac{50}{50^2 + X_3^2} + j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right) = 0.00481$$

Per tant,

$$\left. \begin{aligned} \frac{50}{50^2 + X_3^2} = 0.00481 &\Rightarrow X_3 = \pm 88.76 \\ j\left(\frac{-X_3}{50^2 + X_3^2} + B_4\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_4 = \pm 0.00855$$

- (d) Ara sí el generador té una font de tensió interna d'amplitud (de pic) $|V_G|=1V$, ens demanen que calculem la potència associada a l'ona progressiva que incideix en la càrrega Z_L .

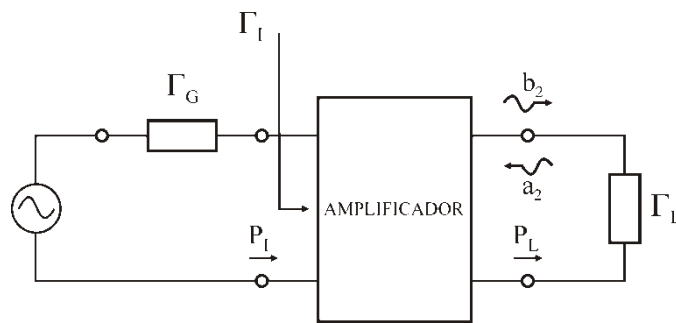


Fig. 33. Esquema de l'amplificador (TRT amb les seves xarxes d'adaptació) connectat al generador i a la càrrega.

Hem de tenir present que tenim l'amplificador muntat amb les seves xarxes d'adaptació a l'entrada i a la sortida corresponents i que per tant :

$$G_T \text{ max} = 8.05$$

$$\Gamma_g = 0 \quad (Z_g = 50\Omega)$$

$$\Gamma_{L \text{ càrrega}} = 0 \quad (Z_g = 50\Omega)$$

Hem de tenir present però, que $\Gamma_g = 0 \neq \Gamma_{I \text{ xarxa}}$ perquè encara que tinguem la xarxa d'adaptació a l'entrada, no és així entre la xarxa i el TRT. Llavors no tenim màxima transferència de potència. Recordem que en l'apartat b vam buscar tenir el mínim soroll ($\Gamma_{G \text{ xarxa}} = \Gamma_{OPT} = 0.3 \neq \Gamma_{I \text{ TRT}}$). Però aquest fet no ens afectarà els càlculs, perquè farem servir G_T , que depèn de $P_{av,g}$, que considera $\Gamma_g = 0 = \Gamma_{I \text{ xarxa}}$.

Com que ens demanen la potència associada a l'ona progressiva que incideix en la càrrega i que aquesta està adaptada $\Gamma_{L \text{ càrrega}} = 0$:

Això implica que:

$$P_L = P_L^+ - P_L^- = \frac{1}{2}|b|^2 - \frac{1}{2}|a|^2 = \{\Gamma_{L \text{ càrrega}} = 0\} = P_L^+ = \frac{1}{2}|b|^2 = G_T \cdot P_{av,g}$$

És a dir:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} = \frac{P_L^+}{P_{av,g}}$$

Ara, per al càlcul de $P_{av,g}$, tenim el següent esquema:

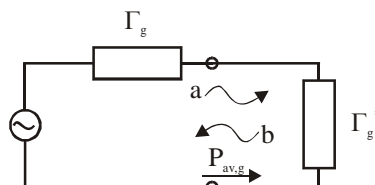


Fig. 34. Esquema d'ones a l'entrada de l'amplificador.

En què recordem que gràcies que estem calculant $P_{av,g}$ considerem que tenim $\Gamma_g = \Gamma_g^* = \Gamma_{I \text{ xarxa}}^* = 0$ (considerant $Z_o \in \Re$).

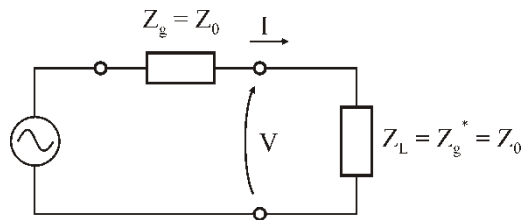


Fig. 35. Esquema d'impedàncies a l'entrada de l'amplificador.

Per tant,

$$P_{av,g} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\frac{Vg}{2} \frac{Vg^*}{2Z_0}\right] = \frac{1}{8} \frac{|Vg|^2}{Z_0} = \frac{1}{8 \cdot 50} = 2.5mW$$

Per tant, la potència final que cau sobre la càrrega és de:

$$P_L = P_L^+ = G_T \cdot P_{av,g} = 8.05 \cdot 0.0025 = 20.125mW$$

Problema 5.4

Suposeu l'amplificador de microones de la Fig. 36, realitzat amb un transistor de paràmetres S (referits a Z_0) i de soroll:

$$S = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.02 \\ 3.5 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Gamma_{MIN} = 1.1 \text{ dB} \\ \Gamma_{OPT} = 0.33 \end{array}$$

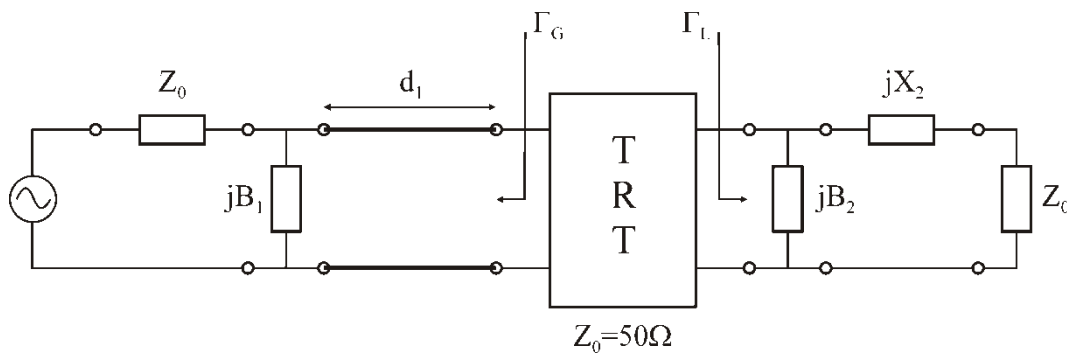


Fig. 36. Esquema de l'amplificador.

- Discutiu l'estabilitat del transistor.
- És unilateral? Justifiqueu-ne la resposta. Torbeu el màxim guany de transferència que pot assolir i comenteu com trobaríeu per aquest cas Γ_G i Γ_L .
- Trobeu Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll i el major guany possible compatible amb el mínim soroll. Doneu el valor del guany de transferència obtingut. Justifiqueu-ne les respostes.
- Si, per al cas anterior, calculéssim el guany de potència, obtindríem un valor major o menor que el del guany de transferència? Per què? I si calculéssim el guany disponible?



- (e) Trobeu els paràmetres de les xarxes d'adaptació d'entrada i de sortida de l'amplificador per al cas de l'apartat (c).

Resolució del problema 5.4

- (a) Hem de discutir l'estabilitat del transistor.

Sabem que el transistor serà incondicionalment estable si compleix amb:

$$\text{Sistema incondicionalment estable} \Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}| < 1 & i \\ |S_{22}| < 1 & i \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| < 1 & i \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{11}S_{22}|} > 1 \end{cases}$$

Ho comprovem:

$$\begin{cases} |S_{11}| = 0.7 < 1 \\ |S_{22}| = 0.8 < 1 \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = |-0.631| < 1 \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{11}S_{22}|} = 1.906 > 1 \end{cases}$$

Per tant, es pot afirmar que el transistor és incondicionalment estable.

- (b) Ens demanen que mirem si és unilateral i que trobem el màxim guany de transferència que pot assolir i que, a més a més, comentem com trobaríem per a aquest cas Γ_G i Γ_L

Anem pas per pas:

És unilateral?

Si sabem que per poder-lo considerar com a tal ha de complir que:

$$|S_{12}S_{21}| \ll 1$$

Si ho comprovem, observem que:

$|S_{12}S_{21}| = 3.5 \cdot 0.02 = 0.07$ que és molt més petit que 1. Per tant, l'amplificador és unilateral

Màxim guany de transferència que pot assolir G_{TUMAX} ?

El guany de transferència per a un transistor unilateral ($|S_{12}S_{21}| \ll 1$) es pot calcular com:



$$G_{TU} = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2)}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_G|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - S_{22} \cdot \Gamma_L|^2}$$

Trobar per a aquest cas Γ_G i Γ_L

El valor màxim s'obté quan s'entrega la màxima potència del generador al quadripol i del quadripol a la carrega. Per tant, caldrà que (considerant que és unilateral):

$$\Gamma_g^* = \Gamma_I = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \approx S_{11}$$

$$\Gamma_L^* = \Gamma_O = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_g}{1 - S_{11} \Gamma_g} \approx S_{22}$$

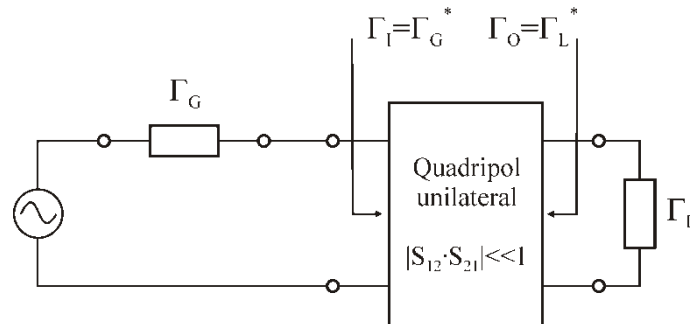


Fig. 37. Esquema amplificador amb les xarxes d'adaptació que proporcionen adaptació complexa conjugada.

Si realitzem els càlculs tenim present aquestes condicions, obtenim que:

$$\begin{aligned} G_{TUMAX} &= \frac{(1 - |\Gamma_G|^2)}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_G|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - S_{22} \cdot \Gamma_L|^2} = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_G = S_{11}^* \\ \Gamma_L = S_{22}^* \end{array} \right\} = \\ &= \frac{(1 - |S_{11}|^2)}{|1 - S_{11} \cdot S_{11}^*|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |S_{22}|^2)}{|1 - S_{22} \cdot S_{22}^*|^2} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = \\ &= \frac{1}{1 - 0.7^2} \cdot 3.5^2 \cdot \frac{1}{1 - 0.8^2} = 66.7 \Rightarrow 18.24 \text{ dB} \end{aligned}$$

(c) Hem de trobar Γ_G i Γ_L per tal que l'amplificador sigui estable, tingui mínim soroll, i el major guany possible compatible amb el mínim soroll.

Si volem mínim soroll ($F=1.1$) cal que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.33$

A més a més, per a tenir el màxim guany possible cal que $\Gamma_L = \Gamma_O^* = S_{22}^* = 0.8$

Llavors:

$$G_{TU} = \frac{(1 - |\Gamma_G|^2)}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_G|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = \frac{(1 - |0.33|^2)}{|1 + 0.7 \cdot 0.33|^2} \cdot |3.5|^2 \cdot \frac{1}{1 - |0.8|^2} = 20 \Rightarrow 13 \text{ dB}$$



- (d) Ara, per al cas anterior, hem de comparar el guany de potència amb el guany de transferència i amb el guany disponible:

Sabem que:

$$G_P = \frac{P_L}{P_I}$$

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}}$$

$$G_A = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}}$$

$P_{av,g}$ és la màxima potència disponible al generador i això passa quan $\Gamma_I = \Gamma_G^*$. En l'apartat (c) això no es compleix. Per tant, $P_I < P_{av,g}$.

$P_{av,N}$ és la màxima potència que es pot tenir en la càrrega i això passa quan $\Gamma_O = \Gamma_L^*$. En l'apartat (c) això sí que es compleix. Per tant, $P_L = P_{av,N}$.

En què $P_{av,N}$ és la potència disponible per la xarxa formada pel generador i l'amplificador.

Llavors, sota aquestes condicions ($\Gamma_I \neq \Gamma_G^*$, $\Gamma_O = \Gamma_L^*$) tenim:

$$\left. \begin{aligned} G_P &= \frac{P_L}{P_I} = \frac{P_{av,N}}{P_I} \\ G_T &= \frac{P_L}{P_{av,g}} = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}} = G_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} G_T &< G_P \\ G_T &= G_A \end{aligned}$$

- (e) Hem de trobar els paràmetres de les xarxes d'adaptació d'entrada i de sortida de l'amplificador pel cas de l'apartat (c).

Xarxa d'adaptació d'entrada

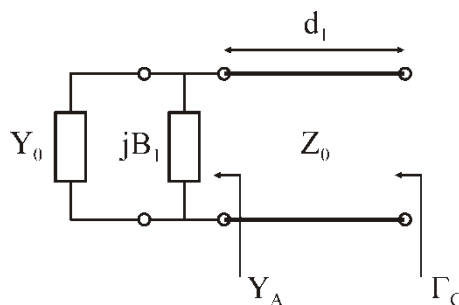


Fig. 38. Xarxa d'adaptació d'entrada. Vista cap a l'entrada.

Tenim que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.33$. Tractem jB_1 i Z_0 en la carta de Smith d'admitàncies. Per tant, tenim que $Y_A = Y_O + jB_1 \Rightarrow \bar{Y}_A = 1 + j\bar{B}_1$, que representa un cercle en la carta de Smith. Ara hem de passar $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.33$ en la carta d'admitàncies i buscar el punt



de creuament amb el cercle anterior ($\bar{Y}_A = 1 + j\bar{B}_1$) movent-nos cap a càrrega. Aquests dos cercles es tallen en el punt $\bar{Y}_{G1} = 1 - j0.7$ i en el punt $\bar{Y}_{G2} = 1 + j0.7$. Llavors, per al primer punt tenim $\bar{B}_{11} = -0.7 \Rightarrow B_{11} = -0.7 \cdot Y_0 = -0.014 \Omega^{-1}$ i per al segon punt $\bar{B}_{12} = +0.7 \Rightarrow B_{12} = +0.7 \cdot Y_0 = 0.014 \Omega^{-1}$. La longitud del stub l'obtenim mirant la distància (representada en fraccions de longitud d'ona) en l'exterior de la carta de Smith.

D'aquesta manera, obtenim com a primera solució per a la línia de transmissió, que per al primer punt de tall: $l_1 = d_1/\lambda = 0.152$ i com a segona solució o possibilitat, per al segon punt de tall $l_2 = d_2/\lambda = 0.348$.

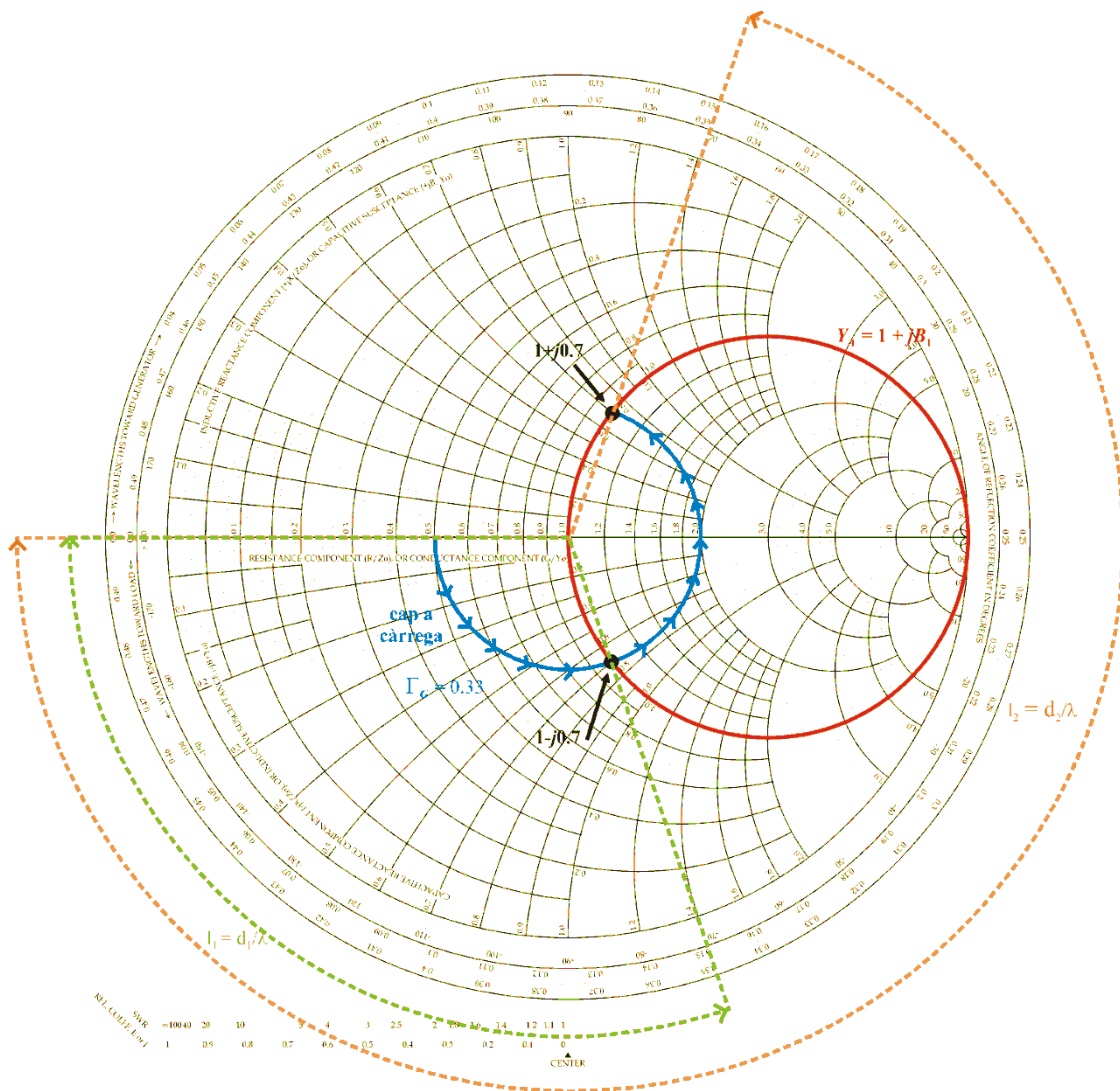


Fig. 39. Adaptació de l'entrada.



Xarxa d'adaptació de sortida

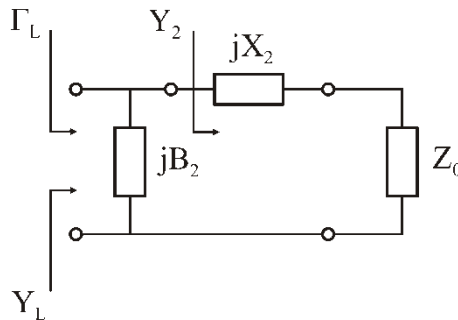


Fig. 40. Xarxa d'adaptació de sortida. Vista cap a la sortida.

$$Z_2 = Z_0 + jX_2 \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{Z_0 + jX_2}$$

$$Y_L = Y_2 + jB_2 = \frac{1}{Z_0 + jX_2} + jB_2 \Rightarrow Y_L = \frac{Z_0}{Z_0^2 + X_2^2} + j\left(B_2 - \frac{X_2}{Z_0^2 + X_2^2}\right)$$

Sabem que:

$$Y_L = Y_0 \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} \Rightarrow \Gamma_L = 0.8 \Rightarrow Y_L = Y_0 \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1 - 0.8}{1 + 0.8} = 0.002$$

Com es pot observar Y_L només té part real i per tant, la part imaginària és igual a zero. Així:

$$\frac{Z_0}{Z_0^2 + X_2^2} = 0.002 \Rightarrow X_2 = 150 \Omega$$

$$B_2 - \frac{X_2}{Z_0^2 + X_2^2} = 0 \Rightarrow B_2 = 0.006 \Omega^{-1}$$

Problema 5.5

Suposeu l'amplificador de microones de la Fig. 41, realitzat amb un transistor de paràmetres S (referits a Z_0) i de soroll:

$$S = \begin{bmatrix} 0.7 \angle -110^\circ & 0.07 \angle 45^\circ \\ 3.5 \angle 130^\circ & 0.4 \angle -50^\circ \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Gamma_{MIN} &= 1 \text{ dB} \\ \Gamma_{OPT} &= 0.5 \angle -50^\circ \\ R_n &= 15 \Omega \end{aligned}$$



Per a aquest transistor, en la carta de Smith de la Fig. 2 hi teniu representats els cercles d'estabilitat, de guany de potència constant, de guany disponible constant i de factor de soroll constant.

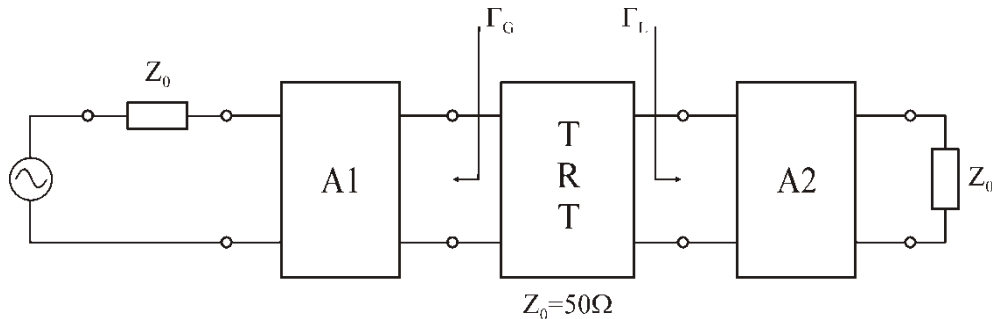


Fig. 41. Esquema de l'amplificador.

- Discutiu l'estabilitat del transistor.
- Utilitzant només la informació que teniu en la carta de Smith, trobeu el màxim guany de transferència que es pot assolir, i els valors Γ_G i Γ_L que el donen. Si estiguéssim disposats a sacrificar 1 dB de guany de transferència, quin factor de soroll podríem aconseguir (aproximadament)?
- Si es desitja un amplificador estable, de mínim soroll i amb el major guany de transferència possible compatible amb el mínim soroll, trobeu els valors adequats de Γ_G i Γ_L . Trobeu també el valor del guany de transferència obtingut, utilitzant només la informació de la carta de Smith. Si estem disposats a augmentar el factor de soroll fins a 2 dB, quin és (aproximadament) el màxim guany de transferència que podem obtenir en aquest cas?

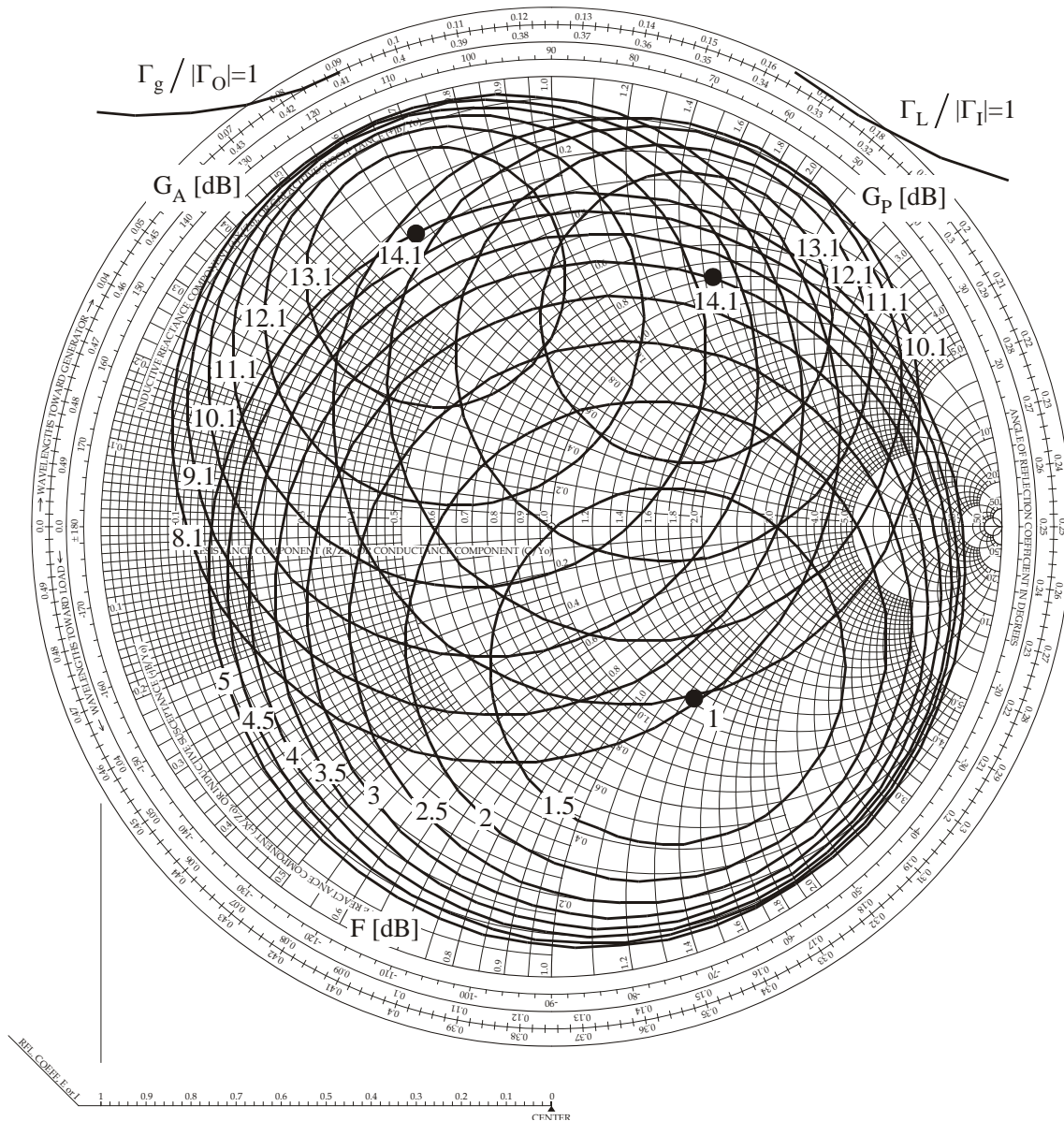


Fig. 42. Dades per al transistor.

Resolució del problema 5.5

a) Hem de discutir l'estabilitat del transistor.

Sabem que el transistor serà incondicionalment estable si compleix amb:

$$\text{Sistema incondicionalment estable} \Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}| < 1 & i \\ |S_{22}| < 1 & i \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| < 1 & i \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{11}S_{22}|} > 1 \end{cases}$$



Ho comprovem:

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_{11}| = 0.5 < 1 \\ |S_{22}| = 0.4 < 1 \\ |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = 0.1058 < 1 \\ K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{11}S_{22}|} = 1.22 > 1 \end{array} \right.$$

Per tant, es pot afirmar que el transistor és incondicionalment estable.

- b) Ens demanen que utilitzant només la informació que teniu en la carta de Smith, trobem el màxim guany de transferència que es pot assolir, i els valors Γ_G i Γ_L que el donen. A més a més, ens diuen que si estiguéssim disposats a sacrificar 1 dB de guany de transferència, hem d'indicar quin factor de soroll podríem aconseguir (aproximadament).

Màxim guany de transferència disponible (MAG):

El màxim guany de transferència disponible (MAG) es produeix quan $MAG = G_T \max = G_p \max = G_A \max$.

En la carta de Smith s'observa un fet que ja sabem: que tant G_A com G_p acaben convergint cap al guany màxim (MAG) de 14.1 dB.

Per tant, $MAG = G_T \max = G_p \max = G_A \max = 14.1dB$.

Valors de Γ_G i Γ_L per a aquesta situació:

Els valors de Γ_G i Γ_L els podem obtenir sabent que $G_A = f(\Gamma_G)$ i per tant, mirant en la carta de Smith en què tenim $G_A \max = 14.1dB$, podem llegir per a quin Γ_G s'ha produït:

$$\Gamma_G = 0.72_{115^\circ}$$

Una situació semblant passa per trobar Γ_L : Sabem que $G_p = f(\Gamma_L)$ i per tant, mirant en la carta de Smith en què tenim $G_p \max = 14.1dB$, podem llegir per a quin Γ_L s'ha produït:

$$\Gamma_L = 0.66_{58^\circ}$$

Factor de soroll sacrificant 1dB de G_T :

El factor de soroll depèn de Γ_G , igual que $G_A = f(\Gamma_G)$.

Si sacrificuem 1dB de $G_T = f(\Gamma_G, \Gamma_L)$, llavors tindrem $\Gamma_I \neq \Gamma_G^*$. La bona notícia és que encara podem continuar tenint a la sortida $\Gamma_O = \Gamma_L^*$ per obtenir el màxim guany possible sota aquestes noves condicions, en què tindrem:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} \Big|_{\Gamma_O^* = \Gamma_L} = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}} = G_A$$



Llavors, mirant en la carta de Smith els cercles de G_A (que equivalen als de G_T perquè $\Gamma_O = \Gamma_L^*$) tal com hem dit, i sacrificant 1dB ($14.1dB \rightarrow 13.1dB$), així, el millor Γ_G que podem escollir per minimitzar el factor de soroll i que $G_T = G_A = 13.1dB$ és:

$$\Gamma_G = 0.33_{115^\circ}$$

El factor de soroll obtingut (tret de la carta de Smith) és de:

$$F|_{\Gamma_G=0.33_{115^\circ}} = 2.4dB$$

- c) Ens demanen primer, un amplificador estable, de mínim soroll i amb el major guany de transferència possible compatible amb el mínim soroll, trobant els valors adequats de Γ_G i Γ_L . A més a més, hem de trobar també el valor del guany de transferència obtingut, utilitzant només la informació de la carta de Smith.

Per últim, es pregunten que si estem disposats a augmentar el factor de soroll fins a 2 dB, quin serà (aproximadament) el màxim guany de transferència que podem obtenir en aquest cas.

Amplificador estable, de mínim soroll i amb el major guany de transferència possible

Primer, com que l'amplificador és incondicionalment estable, per a qualsevol valor de Γ_G i Γ_L serà estable.

Ara, mirant la carta de Smith, el mínim factor de soroll correspon a $F = 1 dB$. Com que $F = f(\Gamma_G)$, veiem que per a tenir el mínim soroll possible cal que $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.5_{-50^\circ}$

Ara, amb aquest Γ_G , ja tenim el mínim soroll. Si a més a més hem d'aconseguir el màxim guany possible, llavors l'únic que podem fer és tenir a la sortida $\Gamma_O = \Gamma_L^*$.

Llavors, sota aquestes condicions a la sortida, tornarem a tenir que:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} \Big|_{\Gamma_O^* = \Gamma_L} = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}} = G_A$$

I per tant podem llegir en la carta de Smith el valor de G_A per a aquest $\Gamma_G = \Gamma_{OPT} = 0.5_{-50^\circ}$:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} \Big|_{\Gamma_O^* = \Gamma_L} = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}} = G_A = 8.1dB$$

També ho podríem haver fet analíticament:

El valor de $\Gamma_L = \Gamma_O^*$ utilitzant $\Gamma_G = \Gamma_{OPT}$ és:



$$\Gamma_0 = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_G}{1 - S_{11}\Gamma_G} \Rightarrow \Gamma_0 = 0.3164_{\angle -42.03^\circ} \Rightarrow \Gamma_L = \Gamma_0^* = 0.3164_{\angle 42.03^\circ}$$

Per tant, si calculem ara G_T :

$$G_T \Big|_{\substack{\Gamma_G=0.5_{\angle -50^\circ} \\ \Gamma_L=0.3164_{\angle 42.03^\circ}}} = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_g)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_L|^2} \Big|_{\substack{\Gamma_G=0.5_{\angle -50^\circ} \\ \Gamma_L=0.3164_{\angle 42.03^\circ}}} = 6.5927 \Rightarrow 8.19 \text{ dB}$$

Augmentar el factor de soroll fins a 2 dB, indicar quin serà (aproximadament) el màxim guany de transferència

Com que el fet de fixar el factor de soroll ens fixa el coeficient de reflexió del generador Γ_G , per aconseguir el màxim guany hem de tornar a fer $\Gamma_0 = \Gamma_L^*$ i que això provoca que:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{av,g}} \Big|_{\Gamma_0^* = \Gamma_L} = \frac{P_{av,N}}{P_{av,g}} = G_A$$

Llavors, mirant els cercles de G_A i de F en la carta de Smith, si cerquem per $F = 2 \text{ dB}$ quin és el millor G_A , veiem que:

$$G_T \Big|_{\Gamma_0^* = \Gamma_L} = G_A \approx 12.5 \text{ dB}$$