

2008

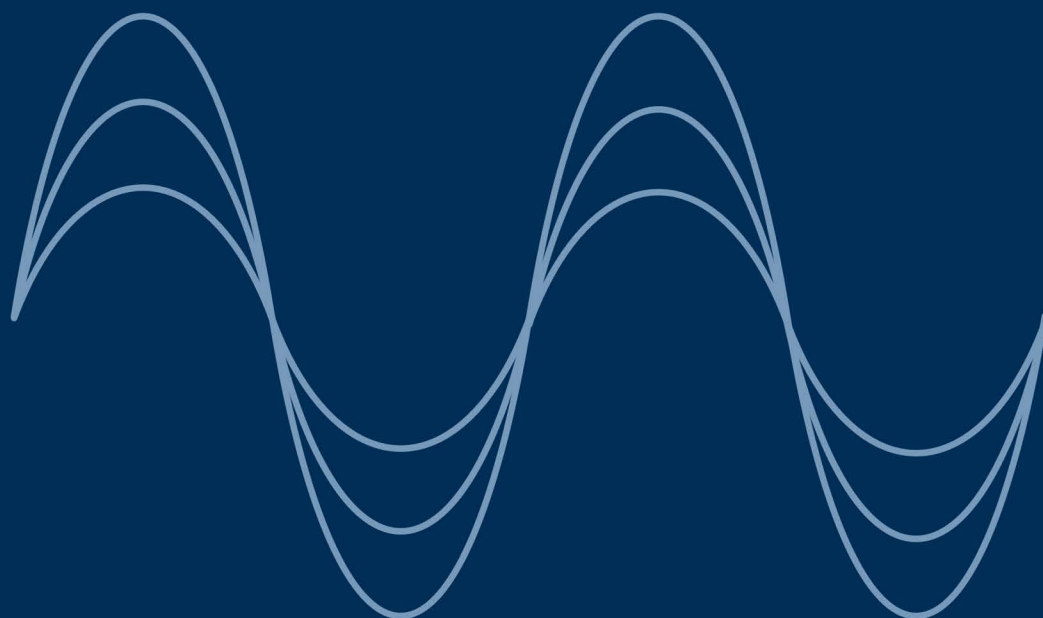
Creative Commons Deed

LaSalleOnline
ENGINYERIES

PROCESSAMENT DIGITAL DEL SENYAL

Guia d'estudi

Joan Claudi Socoró, Jose A. Morán i Germán Cobo



LA SALLE 
ENGINYERIA I ARQUITECTURA

Universitat Ramon Llull



Creative Commons License Deed

Reconeixement-No comercial-Sense obres derivades 2.5 Espanya

❖ **Vostè és lliure de:**

Copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra.

❖ **Sota els següents condicionants:**

Reconeixement.

S'ha de referenciar aquesta obra a Joan Claudi Socoró, José A. Morán i Germán Cobo - Enginyeria La Salle (Estudis Semipresencials).

No comercial.

No es pot utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.

Sense obres derivades.

No es pot alterar, transformar o generar una obra derivada a partir d'aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Alguna d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Els drets derivats d'usos legítims o altres limitacions reconegudes per llei no queden afectats per l'anterior

Això és un resum fàcilment llegible del text legal (la llicència completa) disponible en els idiomes següents:

Català Castellà Basc Gallec

CRÈDITS

- ❖ **Autors:** Joan Claudi Socoró, José A. Morán i Germán Cobo
- ❖ **Editor:** Lluís Vicent
- ❖ **Coordinació lingüística:** Sara Laso
- ❖ **Revisió lingüística:** Cristóbal Cabeza
- ❖ **Maquetació:** Sara Laso
- ❖ **Disseny de portada:** Marc Segarra

Aquesta edició ha comptat amb el suport de l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de la Generalitat de Catalunya en la Convocatòria d'ajuts a l'edició i la difusió de llibres de text o manuals universitaris i llibres científicotècnics, en suport paper o en suport electrònic, escrits en llengua catalana (DILL 2008).





ÍNDEX

SESSIÓ 1	7
1. Caracterització de S.L.I. discrets. Resposta Impulsional	7
1.1. Introducció	7
1.1.1. Seqüències discretes.....	7
1.1.2. Sistemes discrets	8
1.1.3. Propietats del sistemes discrets	9
1.1.4. Problemes de senyals i sistemes discrets	11
SESSIÓ 2	13
1.2. Els S.L.I.T. (Sistemes Lineals Invariants en el Temps)	13
1.3. Resposta impulsional del sistema. Convolució	14
1.3.1. Problema de convolució	16
SESSIÓ 3	19
1.4. Equacions lineals en diferències amb coeficients constants	19
1.4.1. Problema de solució recursiva d'equacions en diferències	22
SESSIÓ 4	23
1.5. Problema de sistemes causals	23
1.5.1. Problema de sistemes estables	24
1.5.2. Problema de l'operador de convolució	24
1.5.3. Problema de càlcul analític de la convolució	24
1.5.4. Problema d'equacions lineals en diferències de coeficients constants.....	25
1.5.5. Problema de propietats de sistemes d'equacions en diferències	25
SESSIÓ 5	27
2. Anàlisi de Fourier per a senyals i sistemes discrets	27
2.1. Introducció a la T.F.S.D.	27
2.1.1. Problema de S.L.I.T.	28
2.2. Representació freqüencial de seqüències mitjançant la T.F.S.D.	28
2.2.2. Problema 1 de T.F.S.D.....	31
2.2.3. Problema 2 de T.F.S.D.....	31
SESSIÓ 6	33
2.3. Propietats de la T.F.S.D.	33
2.3.1. Problema de propietats de la T.F.S.D.	36
SESSIÓ 7	39
2.4. Processament digital de senyals analògics de banda limitada	39
2.4.1. Problema 1.....	42
2.4.2. Problema 2.....	43
2.4.3. Problema 3.....	43
SESSIÓ 8	45
2.5. Modificació de la freqüència de mostreig en el domini discret (delmació i interpolació)	45
2.5.1. Delmació: reducció de la freqüència de mostreig en un factor enter M	46



2.5.2. Problema de delmació	48
SESSIÓ 9	49
2.5.3. Interpolació: augment de la freqüència de mostratge en un factor enter L	49
2.5.4. Problema d'interpolació	51
2.5.5. Modificació de la freqüència de mostratge en un factor racional.....	53
2.5.6. Problema de la modificació de la freqüència de mostratge en un factor racional.....	53
SESSIÓ 10	55
3. La transformada discreta de Fourier	56
3.1. Representació de seqüències periòdiques: la Sèrie Discreta de Fourier (D.F.S.)	56
3.1.1. Problemes de la sèrie discreta de Fourier	58
3.2. Propietats de la Sèrie Discreta de Fourier	59
3.2.1. Problemes de propietats de la D.F.S.....	61
SESSIÓ 11	63
3.3. La Transformada de Fourier de Senyals Periòdics	63
3.4. Mostratge de la T.F.S.D.	64
3.5. Representació freqüencial de seqüències de durada finita: la Transformada Discreta de Fourier (D.F.T.)	66
SESSIÓ 12	69
3.6. Propietats de la D.F.T.	69
3.6.1. Problema 1 de D.F.T.....	74
SESSIÓ 13	77
3.6.2. Problema 2 de D.F.T.....	77
3.6.3. Problema 3 de D.F.T.....	77
3.6.4. Problema 4 de D.F.T.....	78
3.6.5. Problema 5 de D.F.T.....	78
3.6.6. Problema 6 de D.F.T.....	78
3.6.7. Problema 7 de D.F.T.....	79
3.6.8. Problema 8 de D.F.T.....	79
SESSIÓ 14	81
3.7. Càlcul de la convolució lineal amb la D.F.T.....	81
SESSIÓ 15	87
3.8. La Transformada ràpida de Fourier (F.F.T.)	87
SESSIÓ 16	95
4. La transformada Z	95
4.1. Introducció	95
4.2. Definició de la transformada Z	96
4.2.1. Problema: Càlcul de la transformada Z.....	97
4.2.2. Problema: Exponencial orientada a esquerra.....	98
SESSIÓ 17	99
4.3. Propietats de la regió de convergència de la transformada Z.....	99
SESSIÓ 18	103



4.4. Propietats de la transformada Z	103
4.4.1. Propietat de linealitat	103
4.4.2. Desplaçament temporal	104
4.4.3. Multiplicació per una seqüència exponencial.....	104
4.4.4. Diferenciació de $X(z)$	105
4.4.5. Conjugació d'una seqüència complexa.....	106
4.4.6. Reflexió temporal	106
4.4.7. Convolució de seqüències	107
4.4.8. Teorema del valor inicial.....	107
SESSIÓ 19	109
4.5. Introducció a la transformada Z inversa	109
4.5.1. El mètode d'inspecció.....	110
4.5.2. Expansió en fraccions simples	110
4.5.3. Expansió en sèrie de potències.....	112
4.5.3.1. Problema 1 de Transformada Z inversa	112
4.5.3. 2. Problema 2 de Transformada Z inversa	112
SESSIÓ 20	115
4.6. Estudi de sistemes caracteritzats per equacions lineals de coeficients constants	115
4.6.1. Resposta freqüencial de sistemes amb funcions de transferència racionals	117
4.6.2. Problemes de transformada Z de sistemes lineals	118
SESSIÓ 21	119
4.6.3. Problema de càlcul de transformada Z.....	119
4.6.4. Problema de S.L.I.T. i transformada Z.....	120
SESSIÓ 22	121
5. Disseny de filtres digitals	121
5.1. Introducció al disseny de filtres digitals	121
5.2. Disseny de filtres F.I.R. amb el mètode de les finestres	122
SESSIÓ 23	127
5.3. Mètode de disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser	127
5.3.1. Problemes de disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser	129
SESSIÓ 24	133
5.4. Disseny de filtres I.I.R. a partir de filtres analògics	133
5.4.1. Disseny mitjançant la invariància impulsional (mostratge de la $h(t)$).....	134
5.4.2. Disseny mitjançant la transformació bilineal.....	136
SESSIÓ 25	139
5.5. Filtres analògics més usats per al disseny de filtres digitals	139
5.5.1. Problemes de disseny de filtres discrets a partir de filtres analògics	142
5.6. Transformacions freqüencials en el domini analògic	143
5.6.1. Transformacions freqüencials en el domini discret.....	145
SESSIÓ 26	147
6. Filtratge òptim i filtres adaptatius	147
6.1. Introducció al problema d'estimació	147
6.1.1. El concepte de filtratge òptim	148



6.1.2. Necessitats dels filtres adaptatius	148
6.1.3. Estimació Lineal i no Lineal	149
SESSIÓ 27	151
6.2. Estimació Lineal Òptima. El filtre Wiener.....	151
6.2.1. Principi d'ortogonalitat.....	154
SESSIÓ 28	157
6.2.2. Generalització del filtre de Wiener.....	157
6.2.3. El predictor lineal.....	158
6.3. Introducció als filtres adaptatius	158
SESSIÓ 29	161
6.3.1. El mètode LMS (Least Mean Square).....	161
SESSIÓ 30	165
6.3.2. Processadors de Gram Schmidt	165
6.3.3. Estructura Lattice.....	166
SESSIÓ 31	169
6.3.4. El filtre RLS.....	169
SESSIÓ 32	173
6.3.5. El filtre de Kalman.....	173
6.3.6. Exemples comparatius.....	176
SESSIÓ 33	177
7. Xarxes neuronals	177
7.1. Introducció a les xarxes neuronals	177
7.1.1. La neurona	178
7.1.2. Avantatges de les xarxes neuronals.....	179
7.1.3. Model d'una neurona	180
7.1.4. Tipus de funcions d'activació.....	181
7.1.5. Model estocàstic d'una neurona	183
7.1.6. Arquitectures de xarxes neuronals.....	183
7.1.7. Representació i assimilació del coneixement	185
SESSIÓ 34	187
7.2. Els perceptrons	187
7.2.1. Perceptrons de capa única.....	187
7.2.2. Perceptrons multicapa.....	189
SESSIÓ 35	193
7.3. Les xarxes de funcions de base radial (RBF)	193
7.3.1 Estructura	194
7.3.2. Funcions radials i sortida final	194
7.3.3. Aprenentatge.....	195
7.3.4. Comparativa perceptrons vs. RBFN	195
SESSIÓ 36	197
7.4. Els mapes autoorganitzatius.....	197
7.4.1 Topologies.....	198
7.4.2. Distància entre neurones.....	199
7.4.3. Arquitectura.....	200



7.4.4. Entrenament.....	200
SESSIÓ 37	203
7.5. Les xarxes LVQ	203
7.5.1 Arquitectura.....	203
7.5.2. Disseny de la xarxa neuronal	204
7.5.3. Entrenament.....	205
SESSIÓ 38	207
7.6. Aplicacions de les xarxes neuronals.....	207
SESSIÓ 39	211
7.6.1. Estudi d'una aplicació real dels perceptrons	211
7.6.2. Estudi d'una aplicació real de les xarxes competitives	211
7.6.3. Estudi d'una aplicació dels mapes autoorganitzatius	212
7.6.4. Estudi d'una aplicació de les xarxes LVQ	212
7.6.5. Criteris d'avaluació del treball	212
BIBLIOGRAFIA.....	213
GLOSSARI	215





SESSIÓ 1

- ❖ Nom: Introducció als senyals i sistemes discrets
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem els conceptes bàsics necessaris per a definir senyals i sistemes discrets. Veurem la definició de senyals discrets bàsics així com operacions senzilles sobre aquests senyals i veurem els conceptes més interessants sobre sistemes discrets. Aquestes definicions prèvies establiran la base per a l'estudi dels S.L.I.T. (Sistemes lineals invariants en el temps), sistemes sobre els quals desenvoluparem tota la teoria del primer quadrimestre.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem la definició d'una seqüència discreta, tractarem també operacions bàsiques sobre aquestes seqüències i es definirà el concepte de sistema discret, tot definint les propietats bàsiques d'aquest tipus de sistemes.

1. Caracterització de S.L.I. discrets. Resposta Impulsional

1.1. Introducció

1.1.1. Seqüències discretes

En aquest apartat veurem els conceptes més importants dels senyals i de les seqüències discretes. Aquests senyals seran tractats durant tot el curs i el coneixement de les seves propietats i definicions és de vital importància, ja que formen la base sobre la qual es defineixen tots els problemes de processament discret.



Definició de seqüència discreta

Una seqüència discreta es representa matemàticament com una seqüència de nombres. La definició de les seqüències discretes així com la seva generació són punts importants en el processament digital de senyal.

- [Oppenheim1999] p9-p11

Seqüències bàsiques i operacions amb seqüències

En aquest apartat estudiarem les seqüències bàsiques més importants en l'àmbit del processament de senyal així com operacions bàsiques entre seqüències. Analitzarem les característiques de seqüències importants com ara l'esglaó unitari, la funció delta discreta, funcions periòdiques i funcions exponencials. D'altra banda, també veurem com utilitzar i combinar aquestes seqüències per generar seqüències més complexes.

- [Oppenheim1999] p11-p13

1.1.2. Sistemes discrets

En aquest apartat estudiarem els conceptes més importants sobre els sistemes discrets. Primer veurem una definició genèrica sobre què és un sistema discret i estudiarem les propietats més importants d'aquest tipus de sistemes.

Definició de sistema discret

Els senyals són elements que representen un determinat tipus d'informació, una magnitud física, l'evolució dels índexs de borsa, una imatge o un gradient de temperatura. El processament de senyal estudia totes aquelles tècniques que ens permeten fer el tractament de tots aquests tipus de senyals, com ara l'obtenció de les seves característiques freqüencials. No obstant això, acostuma a ser necessària l'aplicació de transformacions sobre aquests senyals per assolir l'objectiu del processament (netejar el senyal de soroll, aïllar dos senyals diferents, reconèixer la persona que parla, etc.). Els sistemes discrets són sistemes que realitzen algun tipus de transformació sobre el senyal o sobre la seqüència d'entrada $x[n]$ transformant-lo en una seqüència de sortida $y[n]$.

Un sistema de processament normalment estarà format per la interconnexió de diferents sistemes discrets amb l'objectiu de transformar el senyal d'entrada en un senyal amb les característiques desitjades.

- [Oppenheim1999] p16-p18



1.1.3. Propietats del sistemes discrets

L'estudi de sistemes discrets és un estudi molt genèric, ja que el conjunt de transformacions que podem trobar sobre les seqüències d'entrada pot ser innumerable. Els sistemes es poden classificar si apliquem restriccions sobre les característiques i el tipus de transformacions que realitzen. En aquest apartat s'estudiaran les propietats més interessants dels sistemes discrets així com alguns exemples sobre els diferents tipus de sistemes.

Sistemes sense memòria

Una de les característiques importants en els sistemes discrets és la propietat de la memòria del sistema. En la transformació realitzada pel sistema, cada mostra del senyal de sortida podria dependre de les infinites mostres del senyal d'entrada. Un sistema es defineix sense memòria sempre que cada valor del senyal de sortida $y[n]$ només depengui del valor de la seqüència d'entrada en aquell mateix instant de temps.

La majoria dels sistemes estudiats són sistemes amb memòria, ja que fan ús de les mostres passades o mostres futures del senyal d'entrada per poder analitzar les seves característiques i dur a terme la transformació. La memòria del sistema és la finestra de visió sobre el senyal d'entrada de què disposa per generar el senyal de sortida.

- [Oppenheim1999] p18

Sistemes lineals

Una propietat molt important en l'estudi de sistemes és la propietat de linealitat. Els sistemes lineals són aquells que admeten el principi de superposició, és a dir, aquells tipus de sistemes en què el coneixement de respostes a dos senyals d'entrada diferents ens permet obtenir la resposta a qualsevol combinació lineal dels mateixos.

La propietat de linealitat és una propietat altament desitjable en la majoria de sistemes, ja que existeixen nombroses tècniques per a l'estudi dels sistemes lineals. En moltes ocasions, si el sistema no compleix la propietat de linealitat s'acostuma a fer una linealització al voltant del punt de treball per poder simplificar l'estudi i el disseny del problema en qüestió.

- [Oppenheim1999] p18

Invariància temporal

En aquest apartat estudiarem la propietat de la invariància temporal. Aquesta propietat, juntament a la de linealitat estudiada en el concepte anterior, donarà lloc als Sistemes Lineals Invariants en el Temps S.L.I.T., un tipus de sistemes de vital importància en el desenvolupament de la transformada de Fourier de seqüències discretes.



La propietat de la invariància temporal és aquella que fa que el comportament del sistema romangui constant en el temps, és a dir, que la transformació roman invariant al pas del temps.

Com a exemple podríem pensar en un simple condensador analògic. Tots sabem que aquest sistema té una determinada funció de transferència que en determina el comportament i aparentment aquesta funció és la mateixa sempre. No obstant això, tots sabem que el pas del temps afecta les característiques físiques del sistema i aquest podria tenir un comportament lleugerament diferent d'aquí a 10 anys. Des d'aquest punt de vista seria un sistema variant en el temps. No obstant això, localment es pot considerar com un sistema invariant, ja que la seva velocitat de canvi és raonablement lenta.

- [Oppenheim1999] p18

Causalitat

En aquest concepte estudiarem un concepte bastant conegut per nosaltres a pesar del poc ús que en podem fer d'aquesta paraula. Els sistemes causals o no anticipatius són aquells que amb el valor de la mostra del senyal de sortida $y[n_0]$ en un determinat

instant de temps n_0 només depèn exclusivament de les mostres del senyal d'entrada amb índex inferiors o iguals a n_0 . Dit d'altra forma, sistemes en què l'entrada sempre precedeix a la sortida.

Això, que ens pot semblar una trivialitat en els sistemes analògics, agafa una altra dimensió en el cas de senyals discrets. En un sistema analògic, com podria ser un televisor, mai se'ns acudiria pensar que la imatge la podem veure abans que es doni la transmissió. Un televisor clarament és un sistema causal. D'altra banda, imaginem un sistema de reconeixement de veu en què la persona ha de dir el seu nom i cognom. Si aquest senyal el tenim enregistrat i hem de realitzar-ne el processament, per què no podríem fer ús de valors de mostres del cognom per ajudar al reconeixement de nom? Si féssim això, estariem dissenyant clarament un sistema no causal o anticipatiu, ja que en el processament del nom estaria fent servir mostres futures corresponents al cognom.

- [Oppenheim1999] p21

Estabilitat

La propietat d'estabilitat és una propietat que haurem de requerir en la gran majoria de sistemes amb què treballem. Definirem un sistema estable com aquell en què la resposta del sistema romandrà acotada a un cert valor finit sempre que el senyal d'entrada sigui un valor acotat en amplitud. És a dir, un sistema és estable sempre que la seva sortida no pot créixer de forma desmesurada per una entrada afitada.



- [Oppenheim1999] p21-p22

1.1.4. Problemes de senyals i sistemes discrets

En aquest apartat de problemes realitzarem alguns problemes per assentar els coneixements adquirits durant aquesta sessió. La finalitat d'aquests problemes és que ens familiaritzem amb els senyals i sistemes discrets així com analitzar les característiques i les propietats associades a les transformacions realitzades pels diferents tipus de sistemes.

Problema de sistemes lineals

Considerem un sistema lineal arbitrari i fent ús de les seves propietats demostreu que si l'entrada al sistema és $x[n]=0 \forall n$ la sortida també serà $y[n]=0 \forall n$.

Problema sobre sistemes discrets

Per a cadascú dels següents sistemes discrets determineu si el sistema és (1) Estable, (2) Causal, (3) Lineal, (4) Invariant en el temps i (5) Sense memòria:

a) $T(x[n]) = x[n]g[n]$ per a un $g[n]$ donat.

b) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$

c) $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

d) $T(x[n]) = x[n - n_0]$

e) $T(x[n]) = e^{x[n]}$

f) $T(x[n]) = ax[n] + b$

g) $T(x[n]) = x[-n]$

h) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n+1]$

La solució la podeu trobar al final del llibre, en els problemes resolts.

RESUM

En aquesta sessió hem introduït els senyals i sistemes discrets com a eines bàsiques per al desenvolupament de problemes de tractament de senyal. Les seqüències discretes formen els elements bàsics sobre els quals treballarem i els sistemes discrets són aquelles eines que ens permetran transformar seqüències.



SESSIÓ 2

- ❖ Nom: Introducció als S.L.I.T.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem estudiar les propietats més importants sobre els senyals i sistemes discrets. També vam veure una classificació dels sistemes discrets en funció de determinades característiques associades a la transformació, definint-ne un conjunt de propietats.

OBJECTIUS

En aquesta sessió presentarem els S.L.I.T. (Sistemes Lineals Invariants en el Temps). Aquest tipus de sistemes són de vital importància en el desenvolupament de la teoria relacionada amb la transformada de Fourier de seqüències discretes. Els S.L.I.T. són aquells sistemes que compleixen la propietat de linealitat i la propietat de invariància temporal de forma simultània. Aquest fet condiciona algunes característiques interessants que estudiarem durant la següent secció.

CONTINGUTS

En aquesta sessió s'estudiaran els S.L.I.T. i tots aquells conceptes i eines d'anàlisi particulars d'aquest tipus de sistemes. Aquests sistemes permeten realitzar el càlcul de la sortida mitjançant l'operador de convolució, operador bàsic dintre de la teoria de senyals i sistemes discrets. Estudiarem les seves principals característiques i la seva utilitat en l'estudi de sistemes.

1.2. Els S.L.I.T. (Sistemes Lineals Invariants en el Temps)

Els S.L.I.T. són sistemes que compleixen de forma simultània les propietats de linealitat i invariància temporal. En aquest apartat veurem per què aquestes propietats fan atractius aquest tipus de sistemes i quines característiques especials tenen per realitzar el càlcul de la sortida del sistema.



Descomposició d'un senyal com a combinació lineal de funcions delta discretes

El primer concepte important en l'estudi del sistemes lineals invariants en el temps és la descomposició d'un senyal com a combinació lineal de funcions delta. La funció delta té la característica que serveix com a localitzador temporal, ja que té un únic valor a 1 i tota la resta de la funció és igual a zero.

L'ús d'aquestes funcions de forma adequada permet generar totes i cadascuna de les mostres d'una seqüència fent la suma de funcions delta amb les amplituds corresponents.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Tal i com podem observar en la fórmula, el senyal $x[n]$ està format per una suma de funcions delta desplaçades en què el coeficient de la combinació lineal és el valor de la seqüència a la posició on es troba la delta.

- [Oppenheim1999] p11

Càlcul del senyal de sortida en els S.L.I.T.

Els sistemes lineals invariants en el temps són uns sistemes amb unes característiques particulars pel que fa al càlcul del senyal de sortida. Per propietat de linealitat, si el senyal d'entrada és una suma de funcions delta desplaçades, el senyal de sortida serà simplement la suma de les respostes a cadascuna de les funcions delta. D'altra banda, totes les funcions delta són versions desplaçades de la delta centrada a l'origen, de tal forma que per propietat d'invariància temporal la sortida a una delta desplaçada és el desplaçament de la resposta a la delta centrada a l'origen.

Tot aquest desenvolupament porta a la conclusió que per trobar la sortida a un S.L.I.T. únicament és necessari el coneixement de la resposta a la funció delta, funció que es coneix com resposta impulsional del sistema. Si el senyal d'entrada és una combinació de deltes desplaçades, el senyal de sortida serà la mateixa combinació lineal de desplaçaments de la resposta impulsional.

- [Oppenheim1999] p22-p23

1.3. Resposta impulsional del sistema. Convulució

Tal i com hem pogut veure en l'apartat anterior, el càlcul de la resposta en un S.L.I.T. es redueix al càlcul del sumatori de convulució entre el senyal d'entrada i la resposta impulsional de sistema. En aquest apartat insistirem sobre la definició de resposta



impulsional i les característiques i propietats de l'operador de convolució que ens ajudarà a determinar interessants propietats sobre l'associació de sistemes.

Definició de resposta impulsional

La resposta impulsional d'un S.L.I.T. és el senyal de sortida que genera el sistema quan a l'entrada és una funció delta discreta. La resposta impulsional és una funció de vital importància en aquests sistemes ja que aquest senyal porta tota la informació necessària del sistema per tal de calcular qualsevol senyal de sortida. El fet que les funcions delta formin una base que permeti la descomposició de qualsevol senyal $x[n]$ fa que la resposta a una funció delta porti tota la informació necessària per realitzar el càlcul del senyal de sortida associat a $x[n]$.

- [Oppenheim1999] p23-p24

Operador de convolució

El desenvolupament de l'expressió de sortida del senyal $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ obtingut

fruit de l'aplicació de les propietats de linealitat i invariància temporal ens porta a la definició d'un operador matemàtic definit com a sumatori de convolució

$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$. El sumatori de convolució és l'operador matemàtic que ens permetrà obtenir el senyal de sortida d'un S.L.I.T. coneguts el senyal d'entrada i la resposta impulsional del sistema. És important que estudiem les propietats d'aquest operador matemàtic i que coneguem quines són les propietats més interessants i el procediment de càlcul del senyal de sortida.

- [Oppenheim1999] p23-p28

Associació de S.L.I.T.

Un problema típic en el desenvolupament d'aplicacions complexes és el de l'associació de sistemes discrets. En el cas que tots el sistemes siguin S.L.I.T. el problema de la seva associació té característiques interessants que estudiarem en aquest capítol. L'operador de convolució és un operador lineal que compleix les propietats de commutativa, associativa i distributiva respecte a la suma. Aquestes propietats porten a interessants propietats sobre l'associació de S.L.I.T.

Totes aquestes propietats porten al fet que qualsevol associació de S.L.I.T. en sèrie, paral·lel o qualsevol combinació d'aquestes associacions es pot reduir a un únic sistema equivalent amb una resposta impulsional que es pot calcular en funció de les respostes impulsional dels sistemes implicats en l'associació.



- [Oppenheim1999] p28-p30

Propietats dels S.L.I.T.

Com que els S.L.I.T. estan completament caracteritzats per la seva resposta impulsional, totes les propietats relacionades amb el sistema es poden deduir en funció de les característiques de la resposta impulsional.

En el cas dels S.L.I.T. veurem que el sistema serà estable sempre que la resposta impulsional sigui absolutament sumable. Cal que recordem que la resposta impulsional és la sortida del sistema quan l'entrada és una delta discreta. La funció delta és una funció localitzada temporalment a l'origen amb energia unitària i la resposta impulsional representa la dispersió d'aquesta energia a la sortida del sistema.

Si la resposta impulsional és sumable vol dir que el senyal de sortida al sistema és acotat quan a l'entrada tenim un senyal acotat, conseqüentment en aquest cas es tractarà d'un sistema estable. En cas contrari, si la resposta impulsional no és absolutament sumable això voldrà dir que el sistema genera un senyal d'energia infinita quan s'alimenta amb un senyal acotat, essent un sistema inestable.

Altres característiques com ara el començament i la finalització de la resposta impulsional ens definiran característiques com la causalitat. Un sistema serà causal o no anticipatiu sempre que la seva resposta impulsional compleixi $h[n] = 0 \quad n < 0$. Si el sistema és causal, l'entrada sempre ha de precedir la sortida, conseqüentment la sortida a una funció delta ha de donar-se posteriorment a la posició temporal del senyal. La resposta impulsional es donarà en les mostres successives a l'instant $n=0$.

- [Oppenheim1999] p30-p34

1.3.1. Problema de convolució

En aquest apartat heu de realitzar un conjunt de problemes relacionats amb la resposta impulsional dels sistemes i l'operador de convolució. És important treballar amb profunditat tots aquests conceptes ja que són la base i els fonaments més importants per assolir amb èxit l'estudi dels capítols posteriors.

Problema convolució

Determineu la sortida d'un S.L.I.T. si el senyal d'entrada $x[n]$ i la resposta impulsional del sistema estan definides segons:

- $x[n] = u[n] \quad h[n] = a^n u[-n-1] \quad a > 1$
- $x[n] = u[n-4] \quad h[n] = 2^n u[-n-1]$
- $x[n] = u[n] \quad h[n] = (0.5)^n u[-n-1]$



d) $x[n] = u[n] - u[n-10]$ $h[n] = 2^n u[-n-1]$

Feu servir propietats de linealitat i invariància temporal per minimitzar treball en els apartats (b)-(d).

- [Oppenheim1999] p72 (problema 2.10.)

RESUM

En aquesta sessió hem vist les característiques més interessants dels S.L.I.T. Hem pogut estudiar la importància de la resposta impulsional en aquests sistemes així com en l'anàlisi de les seves propietats. També hem observat la importància de l'operador de convolució en el càlcul del senyal de sortida en funció del coneixement del senyal d'entrada i la resposta impulsional del sistema i com l'aplicació de les propietats matemàtiques d'aquest operador ens han portat a conclusions sobre la interconnexió de sistemes.





SESSIÓ 3

- ❖ Nom: Equacions lineals amb coeficients constants.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem veure les característiques dels S.L.I.T. Es va constatar la importància del concepte de resposta impulsional i l'operador de convolució com a eina de càlcul de la sortida en aquest tipus de sistemes. D'altra banda, també vam estudiar les propietats dels S.L.I.T. en funció de les característiques de la resposta impulsional.

OBJECTIUS

En aquesta sessió s'introduiran les equacions lineals amb coeficients constants. Aquestes equacions generen una important subclasse dels S.L.I.T. i val la pena realitzar-ne l'estudi ja que ens porten directament a equacions d'implementació de filtres digitals. En aquesta sessió estudiarem les característiques d'aquest tipus d'equacions i estudiarem la seva relació amb els S.L.I.T.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem les característiques de les equacions lineals de coeficients constants en diferències i estudiarem la seva relació amb els S.L.I.T.

1.4. Equacions lineals en diferències amb coeficients constants

En el camp dels senyals i de les seqüències discretes existeixen unes equacions amb característiques interessants, les equacions en diferències amb coeficients constants. Aquestes equacions són l'equivalent a les equacions diferencials de coeficients constants dintre del domini discret. D'igual forma que passava en el cas de sistemes analògics en què les equacions diferencials eren una eina important de cara a la implementació de sistemes lineals, en el cas dels sistemes discrets aquestes equacions formen una important classe de sistemes lineals. El seu coneixement i relació amb la resposta impulsional del sistema són de vital importància de cara al desenvolupament de filtres discrets.



Introducció a les equacions lineals en diferències amb coeficients constants

En aquest concepte definirem que és una equació lineal en diferències de coeficients constants i presentarem algunes de les seves propietats bàsiques de cara a la implementació de sistemes lineals. Una equació lineal amb diferències de coeficients constants és una equació que relaciona dos seqüències de la següent forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Una equació d'aquest tipus és una relació entre una seqüència $x[n]$ i una seqüència $y[n]$ mitjançant combinacions lineals de versions desplaçades de les mateixes.

En determinades ocasions, sistemes lineals amb una donada resposta impulsional coneguda es poden transformar en equacions d'aquest tipus que relacionen l'entrada i sortida del sistema.

Les equacions lineals de coeficients constants amb diferències són una eina d'enorme interès de cara a la implementació real de sistemes. En la sessió anterior vàrem veure que l'operador de convolució relaciona la sortida del sistema amb el senyal d'entrada i la seva resposta impulsional. Si hem de dissenyar un sistema sobre un processador, l'operador de convolució no sempre serà possible d'implementar per poder obtenir la sortida. Segons la longitud de la resposta impulsional definirem dos tipus de filtres: F.I.R. (Finite Impulse Response) i els filtres I.I.R. (Infinite Impulse Response).

Els filtres F.I.R. són filtres amb resposta impulsional finita i la seva implementació mitjançant convolució dona lloc a un sumatori finit que es pot implementar directament sobre un DSP (*digital signal processor* o processador de senyals digitals, dispositiu específic per realitzar operacions de tipus suma i producte en un sol cicle d'instrucció, operació molt habitual en el tractament digital del senyal) o un processador convencional. En canvi, els filtres I.I.R. donarien lloc a sumatoris de durada infinita que farien impossible la implementació sobre un dispositiu de càlcul convencional. La solució passa per obtenir equacions en diferències de caràcter recursiu que ens portin a una possible implementació.

- [Oppenheim1999] p34-p35 (exemples 2.14 i 2.15.)

Condicions inicials

Si considerem una equació com l'anterior

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

una determinada seqüència d'entrada $x[n]$ no generarà una única senyal de sortida, llevat que fixem restriccions addicionals. En general, el senyal de sortida associat a una determinada entrada estarà format per dos senyals diferents



$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

és a dir, tindrà una solució particular $y_p[n]$ que dependrà de la seqüència d'entrada més una solució a l'equació homogènia

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0$$

A l'igual que en les equacions diferencials en el domini continu, la solució del sistema tindrà una solució particular que depèn del senyal d'entrada i una solució homogènia que dependrà exclusivament de l'estat inicial en què es troba el sistema, és a dir, de les condicions inicials.

En qualsevol cas, el tipus de solucions de l'equació homogènia no és d'especial interès en el contingut d'aquest curs. No obstant això, sí que hem de tenir present que existirà aquest tipus de solució i que hem de forçar-la a zero mitjançant l'ús de les condicions inicials per garantir que la resposta del sistema és única i exclusivament la corresponent a la solució particular.

- [Oppenheim1999] p36-p40

Solució recursiva d'equacions en diferències

L'expressió d'una equació en diferències es pot expressar per obtenir una equació recursiva de la solució a l'equació. Una equació en diferències es pot escriure de la següent forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

si volem obtenir una solució orientada a la dreta o

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k]$$

si la volem obtenir orientada a l'esquerra. Com es pot veure en qualsevol de les dues equacions, la forma de la sortida recursiva dependrà de l'entrada del sistema, però també dependrà de les condicions inicials de partida (valor inicial de les sortides anteriors). Les condicions inicials seran les responsables de la solució homogènia, mentre que el senyal d'entrada serà l'encarregat de dirigir la solució particular.

Aquest tipus de sistemes només es comportaran com a sistemes lineals i invariants en el temps si es garanteix un estat inicial de repòs forçant les condicions inicials a zero abans de començar la solució recursiva. Això es de vital importància de cara a la implementació de filtres discrets ja que, si no forcem aquesta restricció, la solució homogènia pot emascarar la solució particular a causa d'una mala inicialització.



- [Oppenheim1999] p37-p39

1.4.1. Problema de solució recursiva d'equacions en diferències

L'equació en diferències que satisfà la relació entrada-sortida en un sistema és

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

Trobeu la sortida del sistema si l'entrada és $x[n] = k\delta[n]$ i $y[-1]=c$. Raoneu quina part correspon a la solució particular i quina part a la solució homogènia.

- [Oppenheim1999] (exemple 2.16.)

RESUM

En aquesta sessió s'han estudiat les equacions lineals amb diferències de coeficients constants. Aquestes equacions són de vital importància de cara a la implementació de filtres discrets de resposta impulsional infinita mitjançant l'ús de la solució recursiva. Aquests sistemes només es comportaran com a sistemes lineals en el cas que garantim un estat inicial de repòs en les seves condicions inicials abans de començar el processament.



SESSIÓ 4

- ❖ Nom: Problemes sobre S.L.I.T.
- ❖ Tipus: de problemes
- ❖ Format: no presencial / semi presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors s'han estudiat les característiques més importants dels S.L.I.T. Hem vist la importància d'aquest tipus de sistemes en el desenvolupament d'aplicacions, la seva caracterització mitjançant la resposta impulsional i el càlcul de sortida amb l'operador de convolució. S'han estudiat també les equacions lineals en diferències amb coeficients constants i hem vist la seva importància de cara a la implementació de filtres I.I.R.

OBJECTIUS

En aquesta sessió de problemes intentarem posar en pràctica tots els coneixements presentats en sessions anteriors i assolir un major grau de comprensió enfrontant-nos a la resolució de problemes lligats als conceptes teòrics desenvolupats.

1.5. Problema de sistemes causals

Per a cadascuna de les següents respostes impulsional, determineu si el sistema és o no és causal.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

b) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

d) $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$

e) $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3^n u[-n-1]$



- [Oppenheim1999] p832 (problema 2.18.)

1.5.1. Problema de sistemes estables

Determineu per a cadascun dels següents S.L.I.T. si el sistema és o no és estable:

- a) $h[n] = 4^n u[n]$
- b) $h[n] = u[n] - u[n - 10]$
- c) $h[n] = 3^n u[-n - 1]$
- d) $h[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u[n]$
- e) $h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$
- f) $h[n] = 2u[n + 5] - u[n] - u[n - 5]$

- [Oppenheim1999] p832 (problema 2.19.)

1.5.2. Problema de l'operador de convolució

En aquest problema estudiareu la reflexió i el desplaçament de la seqüència implicat

en l'operador de convolució $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$.

- [Oppenheim1999] p25 (exemple 2.12.)

1.5.3. Problema de càlcul analític de la convolució

Considereu un sistema amb resposta impulsional

$$h[n] = u[n] - u[n - N]$$

Trobeu l'expressió analítica del senyal de sortida si l'entrada al sistema és

$$x[n] = a^n u[n]$$

- [Oppenheim1999] p26-p28 (exemple 2.13.)



1.5.4. Problema d'equacions lineals en diferències de coeficients constants

Considereu una equació lineal amb diferències de coeficients constants

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1]$$

Determineu el senyal $y[n]$ $n \geq 0$ si $x[n] = \delta[n]$ i $y[n] = 0$ $n < 0$.

- [Oppenheim1999] p830 (problema 2.4.)

1.5.5. Problema de propietats de sistemes d'equacions en diferències

Considereu un sistema amb una relació entrada-sortida que satisfà la següent equació en diferències

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

Considereu que el sistema és causal i que satisfà les condicions inicials de repòs

$$x[n] = 0 \quad n < n_0 \quad \text{i} \quad y[n] = 0 \quad n < n_0.$$

- Si $x[n] = \delta[n]$ determineu el senyal de sortida $y[n]$ per tot n .
- És un sistema lineal? Raoneu la resposta.
- És un sistema invariant en el temps? Raoneu la resposta.

- [Oppenheim1999] p831 (problema 2.12.)

RESUM

En aquesta sessió s'han presentat tot un conjunt de problemes relacionats amb el tema de senyal i sistemes discrets fent èmfasi en els S.L.I.T. Els problemes presentats tenen com a finalitat assolir el grau de comprensió necessari sobre el tema mitjançant la presentació de problemes pràctics lligats amb els temes tractats. Finalment es presenta el capítol d'autoavaluació perquè pugueu comprovar el grau dels vostres coneixements mitjançant la resolució d'algunes preguntes test.





SESSIÓ 5

- ❖ Nom: La Transformada de Fourier de Seqüències Discretes (T.F.S.D.)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En el capítol anterior s'han estudiat les propietats més rellevants dels sistemes lineals invariants en el temps (S.L.I.T.). També s'ha tractat la caracterització temporal fent èmfasi en el càlcul de la resposta impulsional i en l'operador de convolució com a eina matemàtica que permet calcular la sortida del sistema per a qualsevol senyal d'entrada.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem els conceptes bàsics de l'anàlisi en el domini freqüencial per a senyals discrets. Definirem les autofuncions dels sistemes lineals invariants en el temps (S.L.I.T.) i justificarem l'estudi freqüencial mitjançant la descomposició del senyal d'entrada en la base d'autofuncions. Finalment, demostrarem les equacions d'anàlisi i de síntesi de la Transformada de Fourier de Senyals Discrets (T.F.S.D.).

CONTINGUTS

En aquesta sessió analitzarem les característiques fonamentals de la T.S.D. i la seva aplicació a l'estudi i a l'anàlisi de senyals i de sistemes discrets.

2. Anàlisi de Fourier per a senyals i sistemes discrets

2.1. Introducció a la T.F.S.D.

En aquest primer apartat del capítol definirem els conceptes d'autofunció i de resposta freqüencial d'un S.L.I.T. que estan íntimament lligats i permeten donar una visió del seu comportament freqüencial.



Les exponencials complexes com a autofuncions dels S.L.I.T.

Una autofunció es defineix com aquella funció que, alimentada a l'entrada d'un sistema, apareix novament a la sortida multiplicada per un factor de guany escalar (autovalor). Les exponencials complexes compleixen la propietat de ser autofuncions dels S.L.I.T. D'altra banda, com veurem més endavant, formen una base ortogonal en l'espai de seqüències, fet que ens permet representar la totalitat de seqüències d'energia finita. Aquests dos fets justifiquen l'estudi freqüencial mitjançant la T.F.S.D.

- [Oppenheim1999] p39

Resposta freqüencial d'un S.L.I.T.

Analitzant el senyal de sortida per a una exponencial complexa d'entrada genèrica amb pulsació ω , s'observa que el factor de guany multiplicatiu és una funció de la variable ω . (NOTA: D'ara en endavant s'utilitzaran de forma indistinta els termes de freqüència i pulsació per a denotar la variable ω). Depenent de la pulsació del senyal d'entrada, aquest factor pren valors diferents, i l'estudi del guany per a totes les possibles freqüències es coneix com a resposta freqüencial del sistema $H(e^{j\omega})$. Aquesta funció rep també el nom de funció de transferència i, a l'igual que la resposta impulsional, descriu perfectament totes les propietats addicionals (a les de linealitat i invariància temporal). És una funció generalment complexa, de forma que el mòdul ens dona el factor en què es veu modificada l'amplitud del senyal de sortida, i l'argument representa el desfasament relatiu entre el senyal d'entrada $x[n]$ i de sortida $y[n]$.

- [Oppenheim1999] p39-p40

2.1.1. Problema de S.L.I.T.

Dedueix la resposta freqüencial d'un sistema que retarda n_d mostres el senyal d'entrada. Feu la representació en mòdul i fase.

- [Oppenheim1999] p40

2.2. Representació freqüencial de seqüències mitjançant la T.F.S.D.

En aquest apartat veurem les equacions d'anàlisi i de síntesi de la T.F.S.D. així com la comprovació que formen una aplicació bijectiva. Això ens permetrà concloure que tota



seqüència d'energia finita té dues representacions útils i vàlides per a l'estudi de S.L.I.Ts.

Fins ara hem vist la convolució com a eina bàsica d'anàlisi per obtenir la sortida d'un S.L.I.T. a partir de la seqüència d'entrada $x[n]$ i la resposta impulsional del sistema $h[n]$. La representació de seqüències i de S.L.I.T. en el domini freqüencial ens permetrà donar una interessant visió alternativa per obtenir la sortida del sistema com a producte de la T.F.S.D. de la seqüència d'entrada, $X(e^{j\omega})$, i la resposta freqüencial del sistema, $H(e^{j\omega})$.

Expressió de síntesi de la T.F.S.D.

La gran majoria de senyals discretes (senyals d'energia finita, etc...) es poden descompondre segons la següent expressió:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

L'equació anterior rep el nom d'*equació de síntesi* (o inversió de la T.F.S.D.), ja que determina el senyal $x[n]$ a partir d'una combinació lineal contínua d'infinites autofuncions d'amplitud infinitesimal, cadascuna de les quals està ponderada per una quantitat $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$. També podem observar que l'expressió integral recull l'interval de pulsació discreta $[-\pi \ \pi]$. Això és així pel fet que qualsevol pulsació discreta es pot representar (o reduir) en un valor real dins d'aquest interval.

$$e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi k)n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cal recalcar que en el cas d'analitzar un S.L.I.T., cal substituir el senyal $x[n]$ per la resposta impulsional $h[n]$ i $X(e^{j\omega_0})$ per la funció de transferència del sistema $H(e^{j\omega_0})$.

- [Oppenheim1999] p14 (2.15 i 2.16)
- [Oppenheim1999] p45 (2.112)

Expressió d'anàlisi de la T.F.S.D.

En aquest apartat veurem com calcular la quantitat de cada freqüència que hi ha continguda dintre de la seqüència discreta, el que ens expressa l'*equació d'anàlisi*. El valor que representa aquesta quantitat és el que definim com T.F.S.D. (directa) de la seqüència $x[n]$ i es calcula segons la següent expressió en sumatori:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

L'equació anterior es pot interpretar com un producte escalar dintre de l'espai vectorial de les seqüències de durada infinita. En aquest espai vectorial, les exponencials



complexes formen una base ortogonal, de tal forma que les components d'un element $x[n]$ referides a aquesta base s'obtenen mitjançant una simple projecció ortogonal. Per a una pulsació concreta ω_0 , el valor $X(e^{j\omega_0})$ representa el coeficient de projecció de la seqüència sota anàlisi sobre el vector de la base $e^{j\omega_0 n}$, essent la seva magnitud més gran com més similitud existeixi entre ambdós vectors.

- [Oppenheim1999] p45 (2.113)

Demostració de la validesa de les expressions de la T.F.S.D.

En els conceptes anteriors s'han introduït les expressions de síntesi i d'anàlisi de la T.F.S.D. però no s'ha demostrat la seva validesa com a parell d'expressions complementàries. El que es pretén veure en aquest concepte és la demostració formal de les dues expressions anteriors. Si es substitueix l'*equació de síntesi* dins de l'*equació d'anàlisi* es pot comprovar que el resultat és el mateix senyal discret de partida $x[n]$, cosa que verifica que una és l'operació inversa de l'altra.

- [Oppenheim1999] p46-p47 (2.116 i 2.117)

Condicions d'existència de la T.F.S.D.

L'expressió d'anàlisi de la T.F.S.D. es pot interpretar com la suma d'una sèrie de termes genèrics $x[n]e^{-j\omega n}$. En aquest punt es profunditza en les condicions d'existència del resultat d'aquesta suma, ja que de vegades certes seqüències poden provocar que $X(e^{j\omega}) \rightarrow \infty$.

Una condició suficient, però no necessària, que garanteix la convergència uniforme (és a dir, per a tots els valors de ω) de la T.F.S.D. és que la seqüència sigui *absolutament sumable*. Un subconjunt de senyals que compleix aquesta condició és el de les seqüències de durada finita. Cal recalcar que en la gran majoria d'aplicacions es treballa amb senyals finits obtinguts a partir de l'observació en un temps finit de senyals que potser són infinits. Aquest fet garanteix que en la majoria de les aplicacions és possible realitzar un anàlisi freqüencial dels senyals implicats.

Hi ha seqüències que no són *absolutament sumables* però que sí que són *quadràticament sumables*. En aquests casos es diu que hi ha convergència en valor mitjà, el que significa que puntualment $X(e^{j\omega_0})$ pot divergir per a algun valor de ω , però que si es fa un promig dels seus valors a l'interval $[-\pi, \pi]$ el resultat global és finit.

No obstant això, hi ha altres seqüències que tot i no complir les condicions anteriors, tenen una T.F.S.D. analíticament calculable. Alguns d'aquests exemples es veuran al



llarg de les properes sessions, com són un senyal constant, l'esglaió discret, o els senyals sinusoidals.

- [Oppenheim1999] p47-p48

2.2.2. Problema 1 de T.F.S.D.

Calcula la resposta impulsional d'un filtre passabaix ideal de guany 1 i pulsació de tall $0 < \omega_c < \pi$ rad. Tingues en compte que només cal substituir l'expressió de la resposta freqüencial dins de l'interval $[-\pi, \pi]$, i que aquesta és simètrica parella.

- [Oppenheim1999] p49

2.2.3. Problema 2 de T.F.S.D.

Trobeu la seqüència que té per T.F.S.D.:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

on $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$.

- [Oppenheim1999] p51

RESUM

En aquesta sessió hem vist el comportament de les exponencials complexes en l'estudi de S.L.I.T. El factor més important que remarcar és que, independentment del sistema sota anàlisi, si compleix les propietats de linealitat i invariància temporal, les exponencials complexes són sempre les seves autofuncions. Aquest fet justifica la utilitat de l'estudi freqüencial tant dels senyals discrets com dels S.L.I.T.s, ja que una descomposició en exponencials complexes sempre simplificarà l'estudi d'aquest tipus de sistemes.





SESSIÓ 6

- ❖ Nom: Propietats de la T.F.S.D.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem veure la introducció a la T.F.S.D. i la importància d'aquesta transformada en l'estudi dels S.L.I.T.s així com la definició de les equacions de síntesi i d'anàlisi.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem les propietats de la T.F.S.D. Aquestes propietats ens permetran ampliar la comprensió de l'anàlisi mitjançant T.F.S.D. però d'altra banda ens aportaran un conjunt d'eines aplicables per al càlcul de transformades, essent fonamental el coneixement de les mateixes per poder realitzar càlcul de transformades de senyals complexes.

CONTINGUTS

En aquesta sessió es tractaran les propietats fonamentals de la T.F.S.D.

2.3. Propietats de la T.F.S.D.

Fins ara hem introduït els conceptes relacionats amb l'anàlisi freqüencial tant dels senyals com dels sistemes discrets. És ara el moment de treballar les propietats de l'eina de càlcul que ens permetrà donar aquesta nova visió.

Propietat de periodicitat de la T.F.S.D.

Com ja s'ha raonat anteriorment, qualsevol exponencial complexa es pot expressar amb una pulsació dins de l'interval $[-\pi, \pi]$. Aquest fet justifica clarament la primera de les propietats que veurem, i que diferencia la representació freqüencial dels sistemes analògics de la dels sistemes discrets.



$$X(e^{j(\omega+2\pi r)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+2\pi r)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{-j2\pi r n} = X(e^{j\omega})$$

L'expressió anterior es compleix per qualsevol valor enter d' r . Més endavant es veurà la relació existent entre la T.F.S.D. d'una seqüència i la T.F. del senyal analògic original mostrejat amb tren de deltes. Llavors es veurà una justificació intuïtiva, però molt útil, d'aquesta propietat.

Propietats de simetria

Les característiques de simetria de les exponencials complexes fan que la transformada també compleixi algunes propietats de simetria en funció de les característiques de la seqüència analitzada. Segons si aquesta és real o imaginària, parella o senar, o qualsevol combinació d'aquestes propietats, la T.F.S.D. associada a la seqüència complirà determinades condicions de simetria.

- [Oppenheim1999] p52-p56

Propietat de Linealitat

La T.F.S.D. és una transformada que representa el contingut de les diferents freqüències que generen un determinat senyal. Una de les propietats més interessants és que compleix la propietat de linealitat, és a dir, si coneixem les T.F.S.D.s de dos seqüències diferents, la transformada de qualsevol combinació lineal d'aquests senyals base serà igual a la mateixa combinació lineal de les seves respectives transformades.

- [Oppenheim1999] p56-p57

Propietat de desplaçament temporal

La propietat de desplaçament temporal reflexa les modificacions que pateix la transformada quan es desplaça el senyal origen un determinat nombre de mostres. Hem vist que la T.F.S.D. representa el contingut energètic en cada punt freqüencial així com la fase de cadascuna de les freqüències que generen el senyal. Un desplaçament temporal del senyal no modifica la quantitat de freqüència existent, únicament modificarà la fase en què aquestes apareixeran en el senyal. Això implica que el mòdul de la transformada no varia i únicament canviarà la fase.

- [Oppenheim1999] p56-p57



Reflexió temporal

La propietat de reflexió temporal relaciona la transformada del senyal original respecte al senyal origen després d'aplicar una reflexió temporal. En aquest apartat veurem els canvis que pateix la transformada quan es gira el senyal. Recordem que la part real de la transformada representa la projecció sobre el senyal cosinusoidal, i la part imaginària la projecció sobre el senyal sinusoidal. La reflexió sobre un cosinus no afecta, però, sobre el sinus, provoca un canvi de signe. Aquest provoca que la transformada del senyal reflectit sigui la conjugada del senyal original.

- [Oppenheim1999] p57-p58

Desplaçament en freqüència

La propietat de desplaçament en freqüència es també coneguda com a propietat de modulació. Com veurem en aquest apartat, la modulació consisteix en l'addició d'una component freqüencial sobre el senyal origen que provoca el desplaçament de la seva energia en el domini freqüencial. Aquesta propietat es dedueix pel fet que el producte de dues exponencials produeix una suma dels seus arguments, cosa que fa que el contingut energètic es desplaci una quantitat igual a la freqüència de modulació.

$$\begin{aligned}x[n] &\xleftrightarrow{TFSD} X(e^{j\omega}) \\e^{j\omega_0 n} x[n] &\xleftrightarrow{TFSD} X(e^{j(\omega-\omega_0)})\end{aligned}$$

- [Oppenheim1999] p57

Diferenciació en freqüència

La propietat de la diferenciació en freqüència permet calcular transformades de senyals que no són fàcilment computables amb el mètode directe. Entre d'altres podem calcular transformades de rampes, quadràtiques i en general de qualsevol funció del tipus n^k que sigui absolutament sumable, transformada difícilment calculable pel mètode directe.

- [Oppenheim1999] p58

Teorema de convolució

En el capítol I es van estudiar els sistemes lineals invariants en el temps. Vàrem veure que la sortida del sistema es pot expressar com la convolució entre el senyal d'entrada i la resposta impulsional del sistema. Aquest teorema ens dona tant una visió com una forma alternativa per a calcular la sortida del sistema utilitzant la representació freqüencial tant del senyal d'entrada com del sistema.



Recordem que les exponencials complexes són autofuncions dels S.L.I.T.s Vàrem veure que, en aquests casos, el sistema es comporta com un factor de guany multiplicatiu dependent exclusivament de la freqüència del senyal i de les característiques del sistema. D'altra banda, la T.F.S.D. permet descompondre un senyal com a combinació lineal d'exponencials complexes. Aplicant la propietat de linealitat sobre aquesta descomposició es pot veure fàcilment que la sortida del sistema serà la combinació lineal de les sortides de cada exponencial complexa. Atès que aquestes són autofuncions del sistema, la sortida es calcularà multiplicant-les pel guany que ens determina la funció de transferència, de tal forma que en el domini transformat, les operacions de convolució es transformen en simples operacions de multiplicació, simplificant-se en gran mesura l'estudi dels S.L.I.T.

- [Oppenheim1999] p58-p59

Teorema de Parseval

El teorema de Parseval ofereix una manera alternativa per calcular l'energia d'un senyal a partir del coneixement de la seva T.F.S.D. L'expressió temporal per calcular l'energia del senyal la dona el sumatori del mòdul de totes les seves mostres elevat al quadrat. La T.F.S.D. expressa el senyal com a suma d'exponencials complexes, conseqüentment es pot calcular l'energia del sistema calculant la contribució energètica de cadascuna d'aquestes exponencials. El teorema de Parseval ofereix una equació per obtenir aquesta aportació a l'energia global mitjançant el concepte de densitat espectral de potència.

- [Oppenheim1999] p58

Propietat d'enfinestrament

La propietat d'enfinestrament relaciona la T.F.S.D. del producte de dos senyals en funció de les T.F.S.D.s de cadascun dels senyals originals. Aquest teorema determina que per calcular la T.F.S.D. dels senyals multiplicats cal realitzar la convolució periòdica de les T.F.S.D.s dels senyals implicats.

- [Oppenheim1999] p59-p60

2.3.1. Problema de propietats de la T.F.S.D.

Demostreu les propietats de modulació, reflexió temporal i desplaçament temporal de la T.F.S.D.



RESUM

En aquesta sessió hem pogut veure les propietats fonamentals de la T.F.S.D. Aquestes propietats ens han de servir per completar el grau de comprensió assolit sobre la T.F.S.D. amb l'anàlisi dels conceptes que hi intervenen. D'altra banda, les propietats són una eina de molta utilitat de cara a simplificar el procediment de càlcul de transformades. L'expressió d'anàlisi de la T.F.S.D. està formada per un sumatori infinit de les mostres del senyal sota anàlisi multiplicat per una exponencial complexa negativa. Aquesta expressió no sempre és fàcilment sumable excepte en els casos en què pren forma de sèrie geomètrica. Les propietats estudiades en aquesta sessió ens serviran per deduir transformades de senyals complexes a partir de transformades conegudes i l'aplicació correcta de les propietats.





SESSIÓ 7

- ❖ Nom: Processament digital de senyals analògics de banda limitada.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En l'anterior apartat s'han estudiat les propietats i els teoremes més rellevants de la transformada de Fourier de seqüències discretes (T.F.S.D.). Totes aquestes propietats permeten simplificar l'anàlisi de transformades més complicades, una vegada s'ha analitzat tot el conjunt de transformades bàsiques (tal com les d'una delta de Dirac, un esglaió, un senyal constant, una exponencial complexa, ...etc.). També permeten donar una visió més àmplia a l'enginyer, oferint un coneixement estructurat i jerarquitzat de les transformacions bàsiques en què es pot dividir un problema de gran envergadura.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem una de les aplicacions més importants (però no l'única) dins el món del processament del senyal. Veurem com, mitjançant la concatenació de conversors analogicodigitals (A/Ds), sistemes de processament digital de senyal (ordinador, microcontrolador, DSP, etc.), i conversors digitaloanalògics (D/As), podem construir un sistema de processament de senyals analògics de banda limitada. Veurem com, a partir de les equacions involucrades en el *Teorema del mostratge per senyals de banda limitada*, es pot establir una relació en el domini freqüencial entre el sistema discret implementat i el sistema analògic equivalent global.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem la relació entre la representació freqüencial dels senyals i els sistemes discrets amb els senyals i els sistemes analògics, lligam que permet veure com es pot utilitzar un sistema discret lineal i invariant per tal de construir un sistema analògic lineal i invariant equivalent.

2.4. Processament digital de senyals analògics de banda limitada

Una de les aplicacions més habitual dins el món del tractament digital del senyal és el processament digital de senyals analògics de banda limitada. Aquest tipus d'aplicacions poden desembocar en dues variants: el *processament de senyal en temps real (Real-Time Signal Processing)*; i el *processament de senyal en temps*



diferit. Les úniques diferències són que, en la segona versió, els senyals discrets tant d'entrada com de sortida, són emmagatzemats en una memòria, i també que per al primer tipus d'aplicacions es requereixen sistemes específicament dissenyats per a una computació àgil i eficient (és el cas dels *processadors digitals de senyal* o DSPs). No obstant això, totes dues variants tenen exactament la mateixa interpretació en el domini freqüencial i, per tant, l'anàlisi funcional no té cap diferència.

Per tal de relacionar ambdós móns (l'analògic amb el digital, i viceversa) disposem de tota la teoria desenvolupada sobre el *Teorema del mostratge per a senyals de banda limitada*. En aquest apartat no es desenvoluparà tota aquesta teoria, ja que és matèria d'assignatures de cursos anteriors. Es deixa, doncs, al lector, la revisió de tots aquests conceptes.

A les pàgines 140-153 del Oppenheim podeu trobar un resum sobre aquest concepte.

Relació entre la transformada de Fourier d'un senyal analògic de banda limitada i la T.F.S.D. de la seqüència obtinguda a partir del seu mostratge uniforme

Sigui $x_c(t)$ un senyal analògic de banda limitada a $B = \pi/T$ rad/seg., i sigui $x[n]$ la seqüència obtinguda a partir d'un mostratge uniforme d'aquest a T segons per mostra, és a dir $x[n] = x(nT)$, aleshores es pot demostrar que la relació entre la transformada de Fourier (o a partir d'ara T.F.) del senyal analògic i la T.F.S.D. de la seqüència és:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

on $X_c(j\Omega) = T.F.\{x_c(t)\}$ i $X(e^{j\omega}) = T.F.S.D.\{x[n]\}$.

Aquesta relació posa de manifest força conceptes, tots ells molt interessants, i que permeten aprofundir en la interrelació dins el pla freqüencial entre ambdós dominis analògic i discret.

La normalització de freqüències: baixes i altes freqüències en el domini discret

En primer lloc, cal recordar la transformada de Fourier del senyal que s'obté en mostrejar $x_c(t)$ amb un tren de deltes periòdic de període T segons. Anomenem aquest senyal $x_m(t)$, de forma que:

$$x_m(t) = x_c(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{T.F.} X_m(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$



Aquesta expressió diu que en mostrejar uniformement (i amb deltes) un senyal analògic, en el domini freqüencial es produeix una repetició de tot el contingut espectral del senyal analògic a pulsacions múltiples de la pulsació fonamental $2\pi/T$ rad/seg. També apareix un factor d'escala igual al període de mostrejatge T . En definitiva, podem concloure que l'observació a temps discrets en el domini temporal d'un senyal analògic implica l'aparició de periodicitat en el domini freqüencial. D'altra banda, observem també que utilitzant les dues equacions anteriors, la T.F.S.D. de la seqüència resultant de la conversió A/D, $x[n]$, no és més que $X_m(j\Omega)$ fent el canvi de variable següent:

$$\Omega = \omega/T$$

Aquest canvi s'anomena normalització de freqüències. Ens diu que la freqüència discreta ω s'obté dividint la freqüència analògica Ω per la freqüència de mostrejatge $f_m = 1/T$, i, en conseqüència, que ω és justament Ω però normalitzant els valors tal que la pulsació fonamental $\Omega = 2\pi f_m$ rad/seg. es correspongui amb la pulsació normalitzada $\omega = 2\pi$ rad.

En conclusió, unint les dues anteriors observacions, podem afirmar que $X(e^{j\omega})$ és periòdica amb període fonamental normalitzat a 2π rad (ja que la periodicitat de $2\pi/T$ rad/seg. s'ha normalitzat). Com veiem, això concorda amb la primera de les propietats de la T.S.F.D. Però tota aquesta explicació té un valor afegit molt important, que és el fet de poder interpretar la freqüència dels senyals discrets com una normalització aplicada sobre la repetició d'un cert marge de baixes freqüències del domini analògic. En definitiva, es pot parlar de la baixa freqüència, en la T.F.S.D. dels senyals discrets, a tots aquelles regions de l'eix ω centrades al voltant de les pulsacions $\omega = 2\pi k$, essent k un nombre enter qualsevol. Tots aquests punts es corresponen amb la baixa freqüència analògica, quan l'espectre s'ha repetit a pulsacions múltiples de $2\pi f_m$ i posteriorment s'ha dividit l'eix de freqüència per f_m . De la mateixa forma, podem interpretar que l'alta freqüència queda ubicada a les pulsacions discretes $\omega = \pi k$, essent k un nombre enter senar. En aquest cas, cal dir que es considera la màxima alta freqüència justament el que es coneix com a freqüència de Nyquist. En general, la freqüència de Nyquist és la meitat de la freqüència de mostrejatge, i coincideix amb el màxim ample de banda que pot tenir el senyal analògic $x_c(t)$ si es vol poder recuperar-lo filtrant passabaix el senyal mostrejat amb tren de deltes (veure planes 140-153 d'aquest llibre).

- [Oppenheim1999] p154

Anàlisi d'un sistema de tractament digital per a senyals analògics de banda limitada

Analitzem ara l'esquema de la figura 4.11 (pàgina 153 d'aquest llibre), en el cas que el processament que es vol fer és lineal (el sistema discret del mig és un S.L.I.T.). L'objectiu d'aquest apartat teòric és veure quin és el comportament freqüencial del sistema com a sistema analògic amb senyal d'entrada $x_c(t)$ i senyal de sortida $y_c(t)$,



en funció de la funció de transferència del sistema discret utilitzat. És clar que aquesta relació pot ser de molta ajuda per a l'enginyer que hagi de dissenyar el sistema discret donades unes especificacions de comportament del sistema analògic equivalent.

Estudieu el desenvolupament teòric de l'apartat 4.4 (planes 153-155 d'aquest llibre). Del desenvolupament teòric es pot concloure que la funció de transferència del sistema analògic equivalent $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ (o també anomenada resposta freqüencial efectiva) es correspon amb la funció de transferència del sistema discret $H(e^{j\omega})$ avaluada només en el període de pulsacions $\omega \in [-\pi, +\pi]$ rad, i desnormalitzada segons el canvi de variable invers al de la normalització $\Omega = \omega T = \omega / f_m$. Fora de l'interval del període centrat a l'origen la funció de transferència val zero (veure equacions (4.37) i (4.38) d'aquest llibre).

Observem, doncs, que el sistema analògic equivalent no pot ser mai un filtre passaalt, ja que la conversió d'analògic a discret limita l'amplada de banda dels senyals a la *pulsació de Nyquist* π / T .

En els dibuixos de la figura 4.13 (pàgina 157 d'aquest llibre), es pot veure gràficament la relació entre ambdues funcions de transferència, en el cas que el sistema discret és un filtre passabaix ideal de pulsació de tall $0 < \omega_c < \pi$.

Invariància impulsional

La relació entre les respostes freqüencials del sistema discret i del sistema analògic equivalent, quan el primer és un S.L.I.T. pot traduir-se al domini temporal:

$$h[n] = T h_c(nT)$$

on $h_c(t) = T.F.^{-1}\{H_{\text{eff}}(j\Omega)\}$. La deducció d'aquesta relació temporal la teniu a la pàgina 161 de [Oppenheim1999]. Es diu que el sistema discret és una versió amb *invariància impulsional* del sistema analògic efectiu.

L'anterior relació, juntament amb la relació en el domini freqüencial, són dues alternatives útils per a realitzar el disseny del sistema discret. De vegades pot ser més interessant utilitzar una o altra relació, per tal de simplificar els càlculs intermedis.

2.4.1. Problema 1

Demostra la següent equació:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

on $X_c(\Omega) = T.F.\{x_c(t)\}$, $X(e^{j\omega}) = T.F.S.D.\{x[n]\}$, i $x[n] = x(nT)$.



Es recomana que agafeu l'expressió de la transformada de Fourier del senyal $x_c(t)$ mostrejat amb un tren de deltes equiespaiades T segons (mostratge ideal), la qual es pot expressar en termes de $X_c(\omega)$, i substituïu el senyal mostrejat pel tren de deltes on cada delta aporta la informació d'una mostra de la seqüència discreta.

- [Oppenheim1999] p143-p147

2.4.2. Problema 2

Calcula la resposta impulsional del sistema discret tal que, connectat amb conversors A/D i D/A a l'entrada i sortida respectivament, i governats pel temps de mostratge T , el sistema total es comporti igual que un derivador analògic ideal.

- [Oppenheim1999] p158

2.4.3. Problema 3

Dibuixa el diagrama de blocs del sistema discret tal que, connectat amb conversors A/D i D/A a l'entrada i sortida respectivament, i governats pel temps de mostratge T , el sistema total es comporti igual que un filtre passabaix de primer ordre amb freqüència de tall Ω_c i guany G configurable:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \frac{G\Omega_c}{\Omega_c + j\Omega}$$

En aquest cas es recomana utilitzar la relació temporal entre les respostes impulsional, tot calculant primer la resposta impulsional del sistema analògic efectiu.

RESUM

En aquesta sessió hem vist com, mitjançant sistemes de conversió analogicodigitals i digitaloanalògics, conjuntament amb sistemes discrets, podem crear un sistema analògic equivalent amb el valor afegit de ser un sistema reprogramable, gràcies a la versatilitat dels sistemes discrets. S'han estudiat les relacions tant freqüencials com temporals d'ambdós sistemes, les quals poden ser de molta ajuda en l'etapa de disseny d'un sistema com aquest.



SESSIÓ 8

- ❖ Nom: Reducció de la freqüència de mostratge en el domini discret (Delmació)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem estudiar el disseny de sistemes de processament de senyals analògics de banda limitada utilitzant sistemes de conversió A/D i D/A i sistemes discrets. Ens vam centrar en el lligam, dins el domini freqüencial, entre tots dos móns (l'analògic i el discret). Finalment, vàrem trobar la relació, tant temporal com freqüencial, entre els senyals/sistemes continus i discrets.

OBJECTIUS

En aquesta sessió veurem com, mitjançant operacions en el domini discret, es pot modificar la freqüència de mostratge que relaciona la seqüència discreta amb el seu senyal analògic original. La delmació i la interpolació són les operacions bàsiques que ens permetran dividir o multiplicar la freqüència de mostratge original per un factor enter, respectivament. L'ús conjunt de totes dues operacions ens permetrà modificar la freqüència de mostratge per un factor multiplicatiu racional. El fet de poder modificar la freqüència de mostratge "en què està representat" el senyal discret desemboca en tot un seguit d'aplicacions molt interessants (com per exemple, aconseguir retards menors que el període de mostratge, o també la descomposició d'un senyal en subbandes per a la seva codificació eficient – *codificació de font* - o compressió).

CONTINGUTS

En aquesta sessió introduïrem i analitzarem els esquemes que permeten modificar, mitjançant operacions en el domini discret, la freqüència de mostratge. Es veuran només els conceptes lligats a la reducció de la freqüència de mostratge en un factor enter M , o el que es coneix també com a *delmació en factor M* .

2.5. Modificació de la freqüència de mostratge en el domini discret (delmació i interpolació)

Fins ara sabem que un senyal $x_c(t)$ de naturalesa contínua i de banda limitada B rad/seg. es pot representar a partir de les seves mostres equiespaiades π/B seg. (veure pàgines 140-150 d'aquest llibre). En general, si es fixa el període de mostratge



T seg., el Teorema del mostratge per a senyals de banda limitada ens garanteix que podrem recuperar, a partir de la seqüència obtinguda com a observacions puntuals equiespaiades T seg. $x[n] = x_c(t = nT)$, el senyal original $x_c(t)$ sempre que $T < \pi/B$. D'altra banda, estarem incomplint el criteri de Nyquist, i per tant, cal emprar un filtre antialiàsing abans del mostratge en si. Aquest filtre no és més que un filtre passabaix amb guany 1 i pulsació de tall π/T rad/seg. En definitiva, en fixar el valor de T, un sistema de conversió A/D seguit del de D/A (sistema discret identitat) reconstruirà només les freqüències del senyal $x_c(t)$ que es trobin dins del marge de pulsacions $|\Omega| < \pi/T$ rad/seg. És a dir, que convertir un senyal del domini analògic al domini discret implica automàticament la pèrdua d'informació d'aquest senyal fora de la banda de freqüències que compleixen el criteri de Nyquist.

2.5.1. Delmació: reducció de la freqüència de mostratge en un factor enter M

Es defineix la delmació en un factor enter positiu M com el procés digital mitjançant el qual s'obté, a partir de la seqüència $x[n] = x_c(nT)$, la seqüència *delmada* $x_d[n] = x_c(nMT)$. Es tracta, doncs, de passar d'un període de mostratge T a un altre període de mostratge MT. Si parlem de freqüència de mostratge, aleshores hem passat d'utilitzar $f_m = 1/T$ per obtenir la seqüència $x[n]$, a utilitzar $f_m' = 1/T' = 1/(MT) = f_m/M$ per a obtenir $x_d[n]$.

Es pot veure clarament que la relació entre les dues seqüències és justament:

$$x_d[n] = x[nM]$$

que significa que la seqüència delmada $x_d[n]$ conté només les mostres múltiples del *factor de delmació* M de la seqüència original. La resta de mostres, per exemple $\{x[1], x[2], \dots, x[M-1]\}$, suposant $M > 2$ desapareixen.

El bloc de delmació es representa esquemàticament com una caixa amb el símbol $\downarrow M$.

Conseqüències de la delmació en el domini freqüencial

Abans de tot és important veure quina relació hi ha entre les T.F.S.D.s $X(e^{j\omega})$ i $X_d(e^{j\omega})$ d'ambdós senyals $x[n]$ i $x_d[n]$ respectivament. Seguiu la demostració de la plana 168 d'aquest llibre, on es relacionen les representacions de totes dues seqüències, partint de la relació que hi ha entre $x[n]$ i $x_c(t)$ en el domini freqüencial, i $x_d[n]$ i $x_c(t)$ en el mateix domini freqüencial. L'expressió final és:



$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega-2\pi i}{M}\right)}\right)$$

Gràficament es pot veure que el significat de l'expressió anterior es tradueix en un *eixamplament en factor M en freqüència de tots els períodes de $X(e^{j\omega})$, conjuntament amb una compressió de l'amplitud en el mateix factor*. La compressió de l'eix freqüencial (factor M dividint a l'argument dins de $X(e^{j\omega})$) és deguda al fet que en ser la pulsació fonamental de mostratge $2\pi/(MT)$, M vegades més petita, les repeticions de la transformada del senyal analògic es troben més juntes, de forma que en fer la *normalització de freqüències* aquestes repeticions es veuen com si s'haguessin eixamplat.

Com evitar l'aliàsing en el procés de delmació

La reducció de la freqüència de mostratge té, no obstant això, un punt crucial que cal ser tractat amb detall. Aquesta reducció provoca un "enduriment" del Criteri de Nyquist a freqüències més petites que les originals i, per tant, veurem com és necessari ubicar un *filtre antialiàsing discret* tot junt abans del procediment mateix de delmació. Estudiarem la problemàtica amb detall.

Atès que partim d'una seqüència original $x[n]$, podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que tota la banda de freqüències del senyal discret conté energia, és a dir, que $X(e^{j\Omega}) \neq 0$ per $|\Omega| < \pi$. Recordem, del tema anterior, que aquesta banda de freqüències en el domini discret representa la banda de pulsacions $|\Omega| < \pi/T = \pi f_m$. És a dir, estem suposant que el senyal continu original $x_c(t)$ ha estat mostrejat a una freqüència de mostratge $f_m \leq B/\pi$ (on B és l'ample de banda del senyal analògic en rad/seg.), de forma que el *filtre antialiàsing* ha retallat les possibles freqüències que no acomplien el *criteri de Nyquist*.

En reduir la freqüència de mostratge, el nou *criteri de Nyquist* és més sever (abans era $f_m > \pi/T$ i ara és $f_m > \pi/(MT)$). Per tant, el *filtre antialiàsing* de la conversió A/D també hauria de ser més sever, però tenim el problema que la conversió la volem fer en el mateix domini discret, sense haver de passar novament pel domini analògic. Així, doncs, la funció d'aquest nou filtre l'hauré d'implementar en el domini discret.

A l'expressió que relaciona les transformades respectives de la seqüència original i la seqüència delmada, recordem que es produïen dos efectes:

- Un eixamplament de tots els períodes d' $X(e^{j\omega})$ en un factor M.
- Una compressió de les amplituds en el mateix factor M.

De fet, l'efecte a) és el que pot provocar l'aparició de l'aliàsing o solapament freqüencial, ja que és conseqüència directa de l'apropament de les repeticions de la transformada del senyal analògic. En conclusió, es veu necessari d'intercalar un *filtre passabaix discret* (que farà la funció de *filtre antialiàsing*) tot just abans del procés de delmació en si. Aquest filtre ha de tenir un guany igual a 1, i una pulsació de tall igual a



$\omega_c = \pi/M$ rad. D'aquesta forma, totes les repeticions, centrades a múltiples de 2π a $X(e^{j\omega})$, quedaran retallades, de forma, en produir-se l'expansió en factor M en freqüència, totes les repeticions quedaran ben confinades dins el marge de freqüències del seu període, evitant així l'aliàsing.

Finalment, el procés de reducció de la freqüència de mostratge es resumeix en la connexió en cascada del *filtre antialiàsing discret* (guany 1, pulsació de tall π/M), seguit del sistema delmador en factor M .

- [Oppenheim1999] p167-p172 (apartat 4.6.1 i figures 4.21, 4.22 i 4.23.)

2.5.2. Problema de delmació

Sigui $x_c(t)$ un senyal analògic de banda limitada tal que $|X_c(j\Omega)| = 0$ per $|\Omega| > \pi/T$, s'obtenen les dues seqüències:

$$i) x_1[n] = x_c(nT)$$

$$ii) x_2[n] = x_c(n3T)$$

Dibuixa la T.F.S.D. de totes dues seqüències, suposant que $X_c(j\Omega)$ té forma triangular dins el marge de freqüències on és diferent de zero, i valor a l'origen A . Es produeix aliàsing en algun cas? Per què? Com ho solucionaries? Dissenya el procediment per obtenir la seqüència $x_2[n]$ a partir de $x_1[n]$. En el cas que es vulgui evitar l'aparició de l'aliàsing en el senyal $X_2(e^{j\omega})$, quines modificacions faries a l'esquema anterior?

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el procediment discret per disminuir la freqüència de mostratge associada a una seqüència en un factor enter M .



SESSIÓ 9

- ❖ Nom: Augment de la freqüència de mostratge en el domini discret (Interpolació)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En l'anterior sessió hem vist com el procés de delmació ens permet obtenir la seqüència que haguéssim obtingut si haguéssim mostrejat el senyal original analògic a una freqüència M vegades més petita que la freqüència original. És aquesta la primera de les operacions bàsiques per poder realitzar un canvi de la freqüència de mostratge.

OBJECTIUS

En aquesta sessió veurem quin és el procediment per obtenir la *seqüència interpolada en factor L* , que correspondria a haver mostrejat el senyal analògic a una freqüència de mostratge L vegades més gran que l'original. Finalment s'estudiarà l'esquema per a realitzar un canvi de la freqüència de mostratge en un factor racional, tot combinant els processos de delmació i d'interpolació, i es veuran alguns exemples pràctics d'aplicació.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem el procés d'interpolació, que consisteix en l'ús d'un mòdul expansor (inserció de zeros) seguit d'un filtre passabaix discret (filtre interpolador).

2.5.3. Interpolació: augment de la freqüència de mostratge en un factor enter L

El procés d'interpolació consta també de dues etapes connectades en sèrie: una *expansió en factor L* ; seguit d'un filtre passabaix de guany L i pulsació de tall π/L rad. Per tal d'entendre l'equivalència entre aquest processament discret i el fet d'augmentar la freqüència de mostratge original en un factor enter L , cal, en primer lloc, veure quina relació hi ha entre les T.F.S.D.s de les dues seqüències (l'original $x[n]$ i la interpolada $x_i[n]$).



La relació entre les representacions freqüencials d'ambdues seqüències es pot establir partint de la relació temporal entre les seqüències i el senyal analògic equivalent. Deixem a l'alumne, la representació com a problema.

Una vegada feta la representació de les T.F.S.D.s de les dues seqüències original $x[n]$ i interpolada $x_i[n]$, es pot resumir la transformació de $X(e^{j\omega})$ a $X_i(e^{j\omega})$ amb dos efectes diferenciats:

- i) Compressió en el factor enter L de tots els períodes (centrats a múltiples de 2π) de $X(e^{j\omega})$.
- ii) Expansió de les amplituds de $X(e^{j\omega})$ en el mateix factor L .

Observem que es tracta justament dels efectes contraris als produïts en el procés de delmació. Això és degut al fet que interpolació i delmació són, de fet, operacions inverses l'una de l'altra. Malgrat tot, això només és estrictament cert quan es fa primer la interpolació en factor L , i després la delmació en el mateix factor $M = L$.

Estudiem els dos passos, ja enunciats anteriorment, en què es desglossa el procediment d'interpolació.

Expansió en factor L

Aquest és el primer dels passos per a interpolació, i es defineix com:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L] & \text{si } n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{altres valors} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - kL]$$

Es tracta, doncs, d'inserir $L-1$ zeros entre cada dues mostres del senyal original. Això equival a distanciar les mostres de $x[n]$ a valors de n múltiples de L . Com es pot veure, freqüencialment equival a comprimir l'eix de freqüència en el *factor d'interpolació* L , és a dir:

$$X_e(e^{j\omega}) = T.F.S.D.\{x_e[n]\} = X(e^{j\omega L})$$

- [Oppenheim1999] p172

Filtre d'interpolació ideal

De la representació de $X_e(e^{j\omega})$ i $X_i(e^{j\omega})$ (del problema anterior), podem veure que hi ha una certa similitud. La gran diferència és que en $X_e(e^{j\omega})$, la compressió de l'eix freqüencial en factor L provoca que la periodicitat de 2π original en $X(e^{j\omega})$ es converteixi en una periodicitat de $2\pi/L$. No obstant això, veiem que els períodes múltiples de L es troben situats a pulsacions $\omega_k = 2\pi k$, on k és un nombre enter.



Aquests períodes coincideixen exactament (llevat, però, del factor d'amplitud L) amb què hi ha en $X_i(e^{j\omega})$.

Per tant, es veu clarament que cal eliminar les $L-1$ repeticions que hi ha entre les pulsacions $\omega \in [\pi/L, 2\pi - \pi/L]$. Això ho podem aconseguir utilitzant un filtre passabaix discret amb una pulsació de tall $\omega_c = \pi/L$. D'altra banda, el guany del filtre ha de ser L per aconseguir el segon efecte de la delmació en el domini freqüencial.

Aquest filtre és, de fet, el sistema que realment interpola, ja que la convolució entre el senyal expandit $x_e[n]$ i la resposta impulsional d'aquest *filtre interpolador* $h_i[n]$ provoca que el senyal interpolat es construeixi mitjançant la repetició de la $h_i[n]$ desplaçada a índex de mostra múltiples d' L i multiplicada per cadascuna de les mostres originals del senyal:

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_i[n - kL]$$

La forma de la resposta impulsional es pot calcular fàcilment aplicant l'equació de síntesi de la T.F.S.D. a la funció de transferència rectangular del filtre, obtenint:

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}$$

Es pot comprovar que $h_i[n] = 0$ per $n = \pm L, \pm 2L, \dots$, i en canvi $h_i[n] = 1$ per $n = 0$. Aquesta propietat, ens assegura que el senyal interpolat contindrà els mateixos valors del senyal original a les mostres múltiples d' L (corresponents a períodes de temps $T_m = 1/f_m$), i en canvi, contindrà a les mostres intermèdies valors que seran combinació lineal de les mostres veïnes segons els coeficients d' $h_i[n]$. En ser la funció *sinc*, una funció que decreix per $n \rightarrow \pm\infty$, això vol dir que es tindran en consideració amb major pes específic les mostres veïnes més properes que no pas les més llunyanes. Això significa, d'alguna manera, que el senyal interpolat té una certa memòria intrínseca o correlació important, pel fet que hem augmentat la freqüència de mostratge, però no s'ha modificat l'ample de banda del senyal analògic equivalent que representa la seqüència interpolada.

- [Oppenheim1999] p172-p176 (apartat 4.6.2)

2.5.4. Problema d'interpolació

A continuació se us proposen un parell de problemes sobre la interpolació.



Problema 1

Sigui $x_c(t)$ un senyal analògic d'amplada de banda $B = \pi/T$ rad/seg., i siguin les seqüències següents obtingudes a partir del seu mostratge uniforme, on L és un nombre enter positiu major que 1:

i) $x[n] = x_c(nT)$, mostratge a $f_m = 1/T$

ii) $x_i[n] = x_c(nT/L)$, mostratge a $f_m' = L/T = Lf_m$

Dibuixa les T.F.S.D.s de totes dues seqüències, suposant que $X_c(j\Omega)$ té forma triangular dins del marge de freqüències no nul·les i amplitud a l'origen A . Es pot produir aliàsing en $X_i(e^{j\omega})$? Per què? Resumeix en tres línies els dos efectes o variacions principals que es deriven de comparar $X(e^{j\omega})$ amb $X_i(e^{j\omega})$.

Problema 2

En un sistema de processament digital de senyal es vol augmentar la freqüència original de mostratge d'1K Hz a 5K Hz. Per fer-ho es proposa fer les següents operacions al senyal original discret $x[n]$:

Mòdul I:

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n - 5k]$$

Mòdul II:

$$x_i[n] = \frac{1}{5} (x_e[n+4] + 2x_e[n+3] + 3x_e[n+2] + 4x_e[n+1] + 5x_e[n] + 4x_e[n-1] + 3x_e[n-2] + 2x_e[n-3] + x_e[n-4])$$

Dibuixa les representacions freqüèncials dels senyals $x_e[n]$ i $x_i[n]$, si la T.F.S.D. $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ té forma triangular, amplitud màxima $1/T$ i ocupa tota la banda de $[-\pi, +\pi]$. Si $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$ dibuixa $x_i[n]$. De quin tipus d'interpolació es tracta? Quines limitacions i avantatges creus que aquesta solució té enfront d'utilitzar el filtre d'interpolació ideal? Justifica els teus raonaments.

- [Oppenheim1999] p173-p175



2.5.5. Modificació de la freqüència de mostratge en un factor racional

Vistos els submòduls de delmació i d'interpolació, útils per a reduir o bé augmentar la freqüència de mostratge en un factor enter respectivament, passem a veure el cas genèric en què es vulgui augmentar o bé reduir la freqüència de mostratge per un factor racional. En aquest cas utilitzarem la concatenació d'un sistema d'interpolació en factor L i, seguidament d'un sistema de delmació en factor M . Si la freqüència original de mostratge és f_m , és clar que després de la interpolació, la nova freqüència de mostratge serà Lf_m , mentre que després de la delmació posterior serà de $R \cdot f_m$, on $R = L/M$ és un nombre racional, anomenat també factor de remostratge.

El fet que primer es posi el sistema d'interpolació i després el de delmació es justifica de la següent manera. Imaginem que invertim aquest ordre, i primer es delma el senyal. Recordem que en realitzar una delmació, estem retallant el contingut freqüencial de la seqüència original de π a π/M . Si ho referim a freqüències analògiques, hem passat de tenir un ample de banda d' $f_m/2$ Hz a $f_m/(2M)$ Hz. D'altra banda, el procés d'interpolació no elimina informació del senyal, per tant l'ample de banda analògic final queda igual. Imaginem, en segon lloc, que realitzem el procediment de remostratge en l'ordre que hem enunciat, primer interpolar i després delmar. En aquest cas en fer primer la interpolació, abans de fer la delmació la freqüència de mostratge s'ha modificat, essent Lf_m . Per tant, ara la delmació provocarà l'eliminació de totes les freqüències majors de $(L/M)f_m$. En conclusió, podem dir que en el primer cas hem eliminat més informació de l'estrictament necessària per a realitzar el remostratge. Per aquest motiu, és convenient fer el procés en l'ordre especificat al primer paràgraf d'aquest apartat.

- [Oppenheim1999] p176-p177

2.5.6. Problema de la modificació de la freqüència de mostratge en un factor racional

Sigui $x[n]$ una seqüència amb T.F.S.D. rectangular tal com:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad |\omega| \leq \pi$$

Dibuixa les T.F.S.D.s de tots els senyals intermedis en un esquema de remostratge del senyal amb factors $L = 2$ i $M = 3$. Es pot simplificar l'ús dels dos filtres passabaix (el filtre interpolador i el filtre antialiàsing) en un de sol? Com? Especifica de forma genèrica el guany i la freqüència de tall d'aquest nou filtre en funció dels índex L i M .

- [Oppenheim1999] p177-p178



RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el procediment discret per tal d'augmentar la freqüència de mostratge associada a una seqüència discreta en un factor enter L . Hem vist com, concatenant els procediments d'interpolació i de delmació podem modificar la freqüència de mostratge en un factor racional.



SESSIÓ 10

- ❖ Nom: La Sèrie Discreta de Fourier
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En el capítol anterior hem estudiat la representació freqüencial dels sistemes discrets i la caracterització freqüencial dels sistemes discrets lineals i invariants (S.L.I.T.) mitjançant la T.F.S.D. També hem vist com podem construir un sistema analògic equivalent a partir de conversors i processadors de temps discret, aprofundint en la relació temporal i freqüencial. Finalment, hem acabat el capítol fent un estudi dels mètodes de remostratge (o modificació de la freqüència de mostratge) mitjançant operacions en el domini discret.

OBJECTIUS

En aquesta sessió començarem el tema 3 anomenat *La Transformada Discreta de Fourier (D.F.T. o Discrete Fourier Transform)*. La D.F.T. és una eina fonamental per entendre la representació freqüencial de les seqüències de temps discret que compleixen la propietat de ser finites. La utilitat d'aquesta eina es justifica pel fet que en la majoria d'aplicacions en temps real, el processament d'un senyal es fa observant-lo a blocs de mostres de longitud constant. Com veurem, l'ús de la D.F.T. ens proporciona una alternativa alhora de realitzar un filtratge d'un senyal, i sovint redueix el cost computacional respecte un processament en el temps mitjançant la convolució.

CONTINGUTS

En aquesta sessió es veurà, com a preàmbul fonamental per a entendre els conceptes posteriors, la representació freqüencial de les seqüències periòdiques mitjançant el *Desenvolupament en Sèrie de Fourier (D.F.S. o Discrete Fourier Series)*.



3. La transformada discreta de Fourier

3.1. Representació de seqüències periòdiques: la Sèrie Discreta de Fourier (D.F.S.)

La Sèrie Discreta de Fourier (ò D.F.S. *Discrete Fourier Series*) és una eina de representació per a les seqüències discretes que compleixen la propietat de periodicitat. A diferència de la Sèrie de Fourier per a senyals analògics, el fet de tractar amb senyals discrets fa que les D.F.S. estiguin formades per un conjunt finit d'exponencials complexes relacionades harmònicament.

Seqüències periòdiques

Considerem una seqüència periòdica de període N (enter positiu) com aquella seqüència $\tilde{x}[n]$ que compleix la condició següent:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN] \quad \forall n, r \in \mathbb{Z}$$

De forma similar que els senyals periòdics analògics, aquest tipus de seqüències es poden representar en una nova base harmònicament relacionada d'exponencials complexes amb freqüències:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

on $\frac{2\pi}{N}$ és el que es considera com a freqüència fonamental, la qual expressa una periodicitat d' N mostres. A part de la component contínua (per $k = 0$), la resta de freqüències compleixen també la periodicitat d' N mostres:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+rN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{j2\pi kr} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

No obstant això, es pot veure com que l'exponencial k -èsima és el mostratge d'una exponencial contínua que realitza k períodes durant l'interval de temps corresponent a N mostres.

Clarament, la seqüència $\tilde{x}[n]$ es pot "resumir" en N graus de llibertat, que poden ser, per exemple, els valors de la seqüència dins l'interval de mostres $0 \leq n \leq N - 1$ (el que anomenem el període fonamental). Fora d'aquest interval tots els valors de $\tilde{x}[n]$ són una repetició d'alguna de les mostres contingudes dins d'aquest interval. És important que us adoneu que les seqüències periòdiques contenen la informació de seqüències finites, per exemple, la informació continguda dins d'un període. Aquest punt, com veurem més endavant, és el que permet establir un lligam directe entre el D.F.S.



(representació freqüencial per a senyals periòdics) i la D.F.T. (representació freqüencial per a senyals finits).

- [Oppenheim1999] p541-p542

El desenvolupament en sèrie discreta de Fourier (D.F.S.)

La D.S.F. és una forma alternativa per representar el senyal $\tilde{x}[n]$ amb els seus N graus de llibertat, però amb un significat freqüencial, en lloc de temporal. L'expressió de síntesi de la D.F.S. és:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Els coeficients de la D.F.S. $\tilde{X}[k]$ s'anomenen també *coeficients de Fourier* d' $\tilde{x}[n]$ i aporten informació (ara discreta, en lloc de contínua, com és el cas de la T.F.S.D.) de l'energia que aquest conté a cada freqüència $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$.

L'equació anterior expressa $\tilde{x}[n]$ com a combinació lineal de les N *exponencials de Fourier*, i és una expressió alternativa a la donada genèricament amb deltes de Dirac.

Per trobar el valor dels coeficients $\tilde{X}[k]$ cal aplicar el fet que la base de funcions exponencials complexes utilitzada és una base ortogonal (sempre que es faci la suma del producte temporal dins d'un període d'un nombre múltiple de períodes). Seguint el desenvolupament de la *pàgina 516 de [Oppenheim1999]* s'arriba a l'expressió d'anàlisi del D.F.S., que és la següent:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- [Oppenheim1999] p542-p544

Periodicitat dels coeficients de Fourier

Analitzant l'equació anterior es pot comprovar que els *coeficients de Fourier* compleixen, a l'igual que la mateixa seqüència temporal $\tilde{x}[n]$, la propietat de periodicitat amb el mateix període N . És a dir, $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k + rN]$, $\forall k, r \in \mathbb{Z}$. Això ens permet de tenir dues interpretacions dels coeficients. La primera, com a seqüència finita de punts $\tilde{X}[k]$ per $0 \leq k \leq N-1$, i fora a la resta de valors de k , ja que són els coeficients que estrictament són necessaris per a representar el senyal discret en l'equació de síntesi. La segona, considerant que els coeficients conformen, de fet, una



seqüència periòdica del mateix període N , i que els coeficients dins del període que va de 0 a $N-1$.

Notació

Per tal de simplificar la notació sovint es substitueix el terme exponencial complex amb:

$$W_N \stackrel{\text{Def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Les expressions del D.F.S. aplicant l'anterior igualtat ens queden:

$$1.- \text{Equació d'anàlisi: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

$$2.- \text{Equació de síntesi: } \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

on tant $\tilde{x}[n]$ com $\tilde{X}[k]$ són seqüències periòdiques. Sovint farem servir la notació:

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}[k]$$

3.1.1. Problemes de la sèrie discreta de Fourier

A continuació se us proposen alguns problemes de la sèrie discreta de Fourier.

Problema 1

Sigui la seqüència periòdica formada per un tren de deltes equiespaiades N mostres (N enter positiu) tal com:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rN]$$

Calcula el desenvolupament en sèrie de Fourier del senyal.

Problema 2

Calcula els coeficients de Fourier de la següent seqüència i expressa el seu desenvolupament en sèrie de Fourier:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_0[n + 10r]$$

on $x_0[n] = u[n] - u[n - 5]$.



3.2. Propietats de la Sèrie Discreta de Fourier

En aquest apartat estudiarem les principals propietats de la D.F.S. que, a l'igual que en el cas de la T.F.S.D., ens poden simplificar l'anàlisi de certs problemes de major envergadura. Cal emfatitzar que en el cas de la D.F.S. per a seqüències periòdiques la representació freqüencial desemboca en una altra seqüència també discreta i periòdica $\tilde{X}[k]$, cosa que en el cas de la T.F.S.D. (eina molt més genèrica) és un senyal analògic i periòdic $X(e^{j\omega})$. Aquest fet fa que certes propietats tinguin diferències importants.

Propietat de linealitat

Siguin $\tilde{x}_1[n]$ i $\tilde{x}_2[n]$ dues seqüències periòdiques amb període N i amb D.F.S. tal com:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}_1[k] \\ \tilde{x}_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}_2[k]\end{aligned}$$

Aleshores, una combinació lineal de les dues seqüències genera una tercera seqüència del mateix període N i amb un D.F.S. format per la mateixa combinació lineal dels coeficients respectius de cada seqüència:

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{D.F.S.} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$$

Aquesta propietat es pot demostrar fàcilment substituint el senyal combinació lineal a dins de l'equació d'anàlisi.

- [Oppenheim1999] p546

Propietat de desplaçament temporal

Sigui $\tilde{x}[n]$ una seqüència periòdica de període N i amb coeficients de Fourier $\tilde{X}[k]$, aleshores un desplaçament d' m mostres de la seqüència ens dona una altra seqüència, amb el mateix període, de forma que els coeficients de Fourier es poden expressar com un producte $\tilde{X}[k]$ per una funció exponencial complex tal com:

$$\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{D.F.S.} W_N^{km} \tilde{X}[k]$$

Com que es tracta d'una seqüència de període N , es pot observar que el desplaçament m es pot expressar, sense pèrdua de generalitat, com un valor entre $0 \leq m \leq N-1$. D'altra banda, sempre es pot expressar un nombre enter com $m = m_1 + m_2N$ on tant m_1 com m_2 són nombres enters i $0 \leq m_1 \leq N-1$ (en general es



pot dir que $m_1 = m \bmod N$). Segons això últim és clar que $\tilde{x}[n - m] = \tilde{x}[n - m_1 - m_2 N] = \tilde{x}[n - m_1]$, i que $W_N^{km} = W_N^{k(m_1 + m_2 N)} = W_N^{km_1} \times W_N^{kNm_2} = W_N^{km_1}$ (el terme $W_N^{kNm_2}$ és periòdic i amb període N).

- [Oppenheim1999]p546-547

Propietat de dualitat

Si observem detingudament les expressions tant d'anàlisi com de síntesi del D.F.S. ens adonarem que són, de fet, expressions gairebé similars (només difereixen d'un factor $1/N$ i del signe de l'exponent de les exponencials W_N). Aquesta gran similitud es pot establir en la relació del D.F.S. ja que el tipus de senyals que tenim en un o altre domini és el mateix (tant $\tilde{x}[n]$ com $\tilde{X}[k]$ són sempre seqüències periòdiques de període N), cosa que no passava en el cas de la representació freqüencial de seqüències aperiòdiques amb la T.F.S.D. ja que el senyal en el domini freqüencial és també periòdic (periodicitat 2π) però continu.

La propietat l'enunciem com:

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}[k] \\ \tilde{X}[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} N \tilde{x}[-k] \end{aligned}$$

És a dir, que si $\tilde{X}[k]$ són els coeficients de Fourier de la seqüència $\tilde{x}[n]$, aleshores $N \tilde{x}[-k]$ són els coeficients de Fourier de la seqüència $\tilde{X}[n]$. No cal perdre de vista que associem la variable n com a índex temporal mentre que k és l'índex freqüencial, el que ens permet saber en quin domini ens trobem.

Propietat de desplaçament freqüencial

Ja vistes les propietats de desplaçament temporal i de dualitat, es pot inferir la propietat de desplaçament freqüencial com un cas particular de la dualitat aplicada sobre la de desplaçament temporal, de forma que ens queda:

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}[k] \\ W_N^{-nl} \tilde{x}[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}[k - l] \end{aligned}$$

No obstant això, la demostració d'aquesta propietat es pot fer igual que es va fer la de desplaçament temporal, gràcies a la similitud entre les expressions d'anàlisi i de síntesi.



En aquest cas, també es pot generalitzar l'índex de desplaçament l a un número enter entre 0 i $N - 1$, de forma que els coeficients del senyal resultant ordenats per freqüències $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ amb $k = 0, 1, \dots, N - 1$ són els següents:

$$\{\tilde{X}[N-l], \tilde{X}[N-l+1], \dots, \tilde{X}[N-1], \tilde{X}[0], \tilde{X}[1], \dots, \tilde{X}[N-l-1]\}$$

Això es pot entendre com un *desplaçament circular* dels coeficients, ja que la seqüència de coeficients és periòdica.

Propietat de convolució periòdica

Siguin $\tilde{x}_1[n]$ i $\tilde{x}_2[n]$ dues seqüències periòdiques amb període N i amb D.F.S. tal com:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}_1[k] \\ \tilde{x}_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}_2[k] \end{aligned}$$

Aleshores si realitzem el *producte punt a punt* entre els coeficients de Fourier d'ambdues seqüències, generem uns nous coeficients de Fourier que es corresponen amb la *convolució periòdica* entre els senyals temporals. És a dir:

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xleftrightarrow{D.F.S.} \tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k]$$

L'operació corresponent en el domini del temps és el que anomenem *convolució periòdica*, i és una operació que es defineix només entre seqüències periòdiques i del mateix període. Observem que el terme $\tilde{x}_2[n-m]$ és una versió girada en el temps i desplaçada en funció de la variable temporal n de $\tilde{x}_2[m]$. Clarament, els dos termes de la *convolució periòdica* són periòdics i del mateix període N . Per tant en desplaçar un respecte de l'altre, el resultat de sumar el producte d'ambdós senyals en el període que va de 0 a $N - 1$ serà també periòdic i del mateix període N .

3.2.1. Problemes de propietats de la D.F.S.

A continuació se us proposen alguns problemes de propietats de la D.F.S.

Problema 1

Demostra la propietat de desplaçament temporal.



Problema 2

Demostreu la propietat de convolució periòdica de la D.F.S. Es recomana que apliqueu l'equació d'anàlisi al senyal $\tilde{x}_3[n]$ de la propietat i apliqueu en el posterior desenvolupament l'intercanvi d'ordre dels sumatoris i la propietat de desplaçament temporal.

- [Oppenheim1999] p548-p549

Problema 3

Calculeu la convolució periòdica entre les seqüències següents:

$$\tilde{x}_1[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1[n+5r] \quad \tilde{x}_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n+5r]$$

on els períodes bàsics dels senyals són:

$$x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \quad x_2[n] = u[n] - u[n-3]$$

Calculeu els coeficients de Fourier dels senyals $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ i $\tilde{x}_3[n]$ amb l'equació d'anàlisi i comproveu que es compleix la propietat $\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k]$.

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat la representació freqüencial associada a les seqüències que compleixen la propietat de ser periòdiques. Tot i la validesa intrínseca de l'estudi fet en sí mateix, no hem de perdre de vista que l'assumpte que ens ocupa és l'anàlisi freqüencial dels senyals finits. Aquest anàlisi s'introduirà a la següent sessió. Veurem com tot aquest estudi previ no és més que un preàmbul força important a l'hora de fer posteriors interpretacions en l'estudi d'aquest tipus de senyals. Hem vist diverses propietats que ens seran útils alhora d'entendre millor les propietats de la D.F.T.



SESSIÓ 11

- ❖ Nom: Cap a la Transformada Discreta de Fourier
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En l'anterior sessió hem introduït la sèrie discreta de Fourier (o D.F.S.) vista com una eina alternativa d'anàlisi freqüencial de les seqüències periòdiques. Hem vist com les seqüències de període N es poden expressar mitjançant una base de Fourier formada per N exponencials complexes de freqüències relacionades harmònicament amb múltiples de la freqüència que marca la periodicitat del senyal.

OBJECTIUS

En aquesta sessió, després d'analitzar la representació de les seqüències periòdiques, s'introduirà la idea que desemboca en la D.F.T.

CONTINGUTS

En aquesta sessió analitzarem, en primer lloc, la T.F.S.D. de les seqüències periòdiques. Seguidament, iniciarem l'anàlisi dels senyals finits, que és de fet, l'objectiu final que es persegueix en aquest capítol. Veurem com podem relacionar els conceptes vistos fins ara al voltant dels senyals periòdics amb els senyals discrets que compleixen la propietat de ser finits. No definirem l'eina d'anàlisi freqüencial d'aquests tipus de senyals (la Transformada Discreta de Fourier, D.F.T. o *Discrete Fourier Transform*) però sí que raonarem la seva necessitat i lògica d'utilització.

3.3. La Transformada de Fourier de Senyals Periòdics

Fins ara hem vist com les seqüències periòdiques de període N poden representar-se alternativament amb un conjunt d' N exponencials complexes relacionades harmònicament. En aquest apartat teòric s'estudiarà la representació de les seqüències periòdiques amb l'eina genèrica d'anàlisi freqüencial per a seqüències discretes: la T.F.S.D.



La transformada de Fourier de senyals periòdics

Tot i que els senyals periòdics no compleixen cap de les propietats de convergència de la T.F.S.D. (no són absolutament sumables, ja que són senyals infinits), el seu D.F.S. proporciona una drecera còmoda i elegant per afrontar el càlcul de la T.F.S.D. Recordem que també varem obtenir les transformades de senyals no sumables com és el cas d'un senyal constant.

A partir de l'equació de síntesi del D.F.S., i aplicant les propietats de linealitat i de modulació a la transformada coneguda $1 \forall n \xrightarrow{T.F.S.D.} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi r)$, es pot calcular fàcilment la T.F.S.D. d'un senyal periòdic $\tilde{x}[n]$ de període N i coeficients de Fourier $\tilde{X}[k]$ i expressar-la com:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

En aquesta equació es pot veure que $\tilde{X}(e^{j\omega})$ està formada per una repetició periòdica d'un patró d' N deltes equiespaiades $2\pi/N$ les àrees de les quals són proporcionals als coeficients de Fourier dins del període $\tilde{X}[k]$ de $0 \leq k \leq N-1$. En ser els coeficients una seqüència periòdica N és clar que la T.F.S.D. també serà periòdica amb període 2π .

Si es calcula la T.F.S.D. inversa de l'equació anterior arribarem a l'expressió de síntesi de la D.F.S., cosa que deixem com a exercici a l'alumne.

- [Oppenheim1999] p552

3.4. Mostratge de la T.F.S.D.

En aquest apartat estudiarem la relació que hi ha entre la T.F.S.D. $X(e^{j\omega})$ d'un senyal $x[n]$ aperiòdic i la seqüència periòdica $\tilde{x}[n]$ llurs coeficients de Fourier corresponen a mostres equiespaiades en freqüència d'un període de $X(e^{j\omega})$.

Mostratge de la T.F.S.D.

Considerem una seqüència aperiòdica $x[n]$ amb una T.F.S.D. genèrica $X(e^{j\omega})$. Definim la seqüència corresponent al mostratge, en el domini freqüencial, a freqüències múltiples de la pulsació fonamental $2\pi/N$, essent N un nombre enter positiu:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \quad \text{per } k \text{ enter}$$



Mostres freqüencials com a coeficients de Fourier d'una seqüència periòdica

Com que $X(e^{j\omega})$ és periòdica 2π , aleshores $\tilde{X}[k]$ serà una seqüència també periòdica amb període N . Per tant, $\tilde{X}[k]$ poden ser els coeficients de Fourier d'una seqüència periòdica $\tilde{x}[n]$ del mateix període, la qual podem expressar com:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Substituint la primera equació dins de la segona, i substituint l'expressió d'anàlisi de la T.F.S.D. dins de $X(e^{j\omega})$ s'arriba a:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

És a dir, que la seqüència periòdica resultant de mostrejar en el domini freqüencial la T.F.S.D. d'un senyal aperiòdic a freqüències múltiples de $2\pi/N$ i d'expressar-la en el domini temporal és l' *expansió periòdica* del senyal aperiòdic original. Aquesta relació és molt similar a l'existent entre els senyals periòdics analògics i els senyals aperiòdics analògics que poden formar els primers (recordeu que els coeficients de la sèrie de Fourier pels primers es podien expressar en funció de la transformada de Fourier d'un *senyal bàsic aperiòdic* la repetició periòdica del qual donava el senyal periòdic).

Conclusió interessant

Una conclusió molt interessant és la següent. Si $x[n]$ és una seqüència finita d' M punts i alhora de mostrejar la T.F.S.D. agafem un nombre suficient de punts dins un període d'aquesta (és a dir, N punts on $N \geq M$) aleshores podem recuperar el senyal finit $x[n]$ de la seqüència periòdica $\tilde{x}[n]$ senzillament fent:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

És a dir, que si una seqüència és finita de longitud N aleshores n'hi ha prou d'observar N valors puntuals equiespaiats $2\pi/N$ de la seva representació freqüencial per poder recuperar totes les mostres temporals del senyal.

Aquest últim raonament ens proporciona l'essència en què es basa la D.F.T.

- [Oppenheim1999] p555-p559



3.5. Representació freqüencial de seqüències de durada finita: la Transformada Discreta de Fourier (D.F.T.)

En aquest apartat es formalitzen les idees proporcionades a l'últim apartat, que ens portaran cap a la definició de la D.F.T.

Origen de la D.F.T.

Comencem per considerar una seqüència finita $x[n]$ definida a l'interval de mostres $0 \leq n \leq N-1$ i zero a la resta. A la pràctica és possible que algunes mostres de l'anterior interval siguin també zero, cas particular que no cal considerar per separat.

Associem a la seqüència $x[n]$ la seva *extensió periòdica* de període N tal com:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n + rN]$$

de forma que podem recuperar la seqüència finita original observant el període per $r = 0$ d'aquesta nova seqüència periòdica. Aquesta equació es pot reescriure com:

$$\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$$

on $((\bullet))_N$ és l'operació *mòdul N* (resta de la divisió entera per N).

Recordem, de l'anterior apartat, que els coeficients de Fourier de $\tilde{x}[n]$ són mostres (espaiades $2\pi/N$ en freqüència) de la T.F.S.D. de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$. Els coeficients de Fourier $\tilde{X}[k]$, que recordem que també són periòdics, de període N , ens permeten recuperar el senyal periòdic i, en conseqüència, també el senyal finit original.

Tal i com en el temps, la seqüència a considerar és una seqüència finita, la repetició de la qual ens proporciona la seqüència periòdica, en el domini freqüencial treballarem de la mateixa manera, quedant-nos només amb la informació d'un sol període dels coeficients de Fourier. Segons això últim, estem en condicions d'introduir la Transformada Discreta de Fourier (D.F.T.) d' N punts del senyal $x[n]$ com:

$$X[k] = D.F.T._N\{x[n]\} = \begin{cases} \tilde{X}[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

- [Oppenheim1999] p559-p561



RESUM

En aquesta sessió hem introduït les idees bàsiques necessàries per tal d'entendre amb profunditat la D.F.T., eina essencial de càlcul per a representar els senyals de naturalesa discreta i finits. A part, hem vist també com les seqüències periòdiques de període N contenen només energia a freqüències múltiples de la seva pulsació fonamental $2\pi / N$.



SESSIÓ 12

- ❖ Nom: Definició i propietats de la D.F.T. (I)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 2 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem introduir la que serà eina bàsica per a l'anàlisi freqüencial dels senyals discrets de durada finita: la Transformada Discreta de Fourier (D.F.T.). Vàrem veure l'estret lligam que es pot establir entre la sèrie discreta de Fourier (D.F.S.) i aquesta nova eina d'anàlisi. Concretament, es pot parlar d'un *isomorfisme* entre la D.F.T. per a seqüències finites i la D.F.S. per a seqüències periòdiques. Aquest paral·lelisme s'estableix gairebé com una equivalència quan el període bàsic que es repeteix en la seqüència periòdica coincideix amb la seqüència finita.

OBJECTIUS

Com ja s'ha comentat anteriorment, la majoria d'aplicacions de processament de senyal digital requereix de la *vectorització* dels senyals prèvia al seu tractament, és a dir, la conversió d'un flux continu de dades que provenen d'alguna font d'informació (senyal de veu, àudio musical, senyal d'un sensor, d'una antena, etc.) a un flux també continu de vectors de longitud N corresponents a trames d' N mostres del senyal d'entrada. A la pràctica, sovint resulta molt més econòmic (computacionalment parlant) processar aquests blocs de dades com un conjunt d'operacions en què es poden aprofitar la capacitat de paral·lelització dels processadors.

CONTINGUTS

En aquesta sessió definirem formalment la D.F.T. i introduïrem algunes propietats bàsiques. Com sempre, les propietats ens serviran per analitzar i interpretar la D.F.T. de senyals més complexos a partir de D.F.T.s de senyals més senzills.

3.6. Propietats de la D.F.T.

En aquest apartat repassarem la definició de la D.F.T. i veurem les seves propietats bàsiques. Establert el lligam que hi ha entre la D.F.T. (per a seqüències finites) i la D.F.S. (per a seqüències periòdiques), totes les propietats que veurem es fonamenten en les ja vistes de la D.F.S. al capítol.



Definició de la D.F.T.

Sigui $x[n]$ una seqüència finita d' N punts definida a l'interval $0 \leq n \leq N-1$, definim la seqüència de la mateixa longitud $X[k]$ com la D.F.T. d' N punts d' $x[n]$. Les equacions que relacionen ambdues representacions temporal i freqüencial de la seqüència són:

1.- Equació d'anàlisi:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

2.- Equació de síntesi:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

on ambdues seqüències es consideren nul·les fora dels intervals definits, i

$$W_N \stackrel{\text{Def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Genèricament, la relació entre elles s'expressa com:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{D.F.T.}} X[k]$$

Tot i que les expressions d'anàlisi i síntesi tenen la propietat de ser periòdiques (s'obtenen els mateixos valors repetits fora dels intervals definits), quan parlem de senyals finits, només es calculen els N punts tant en un com en l'altre domini. La periodicitat intrínseca és el que lliga la D.F.T. amb la D.F.S. De fet aquest estret lligam es pot acabar expressant elegantment de la següent manera:

$$x[\left((n)\right)_N] \xleftrightarrow{\text{D.F.S.}} X[\left((k)\right)_N]$$

on recordem que l'operació $\left((x)\right)_N$ indica la resta de la divisió entera de x entre N , o també $x \bmod N$.

Propietat de linealitat

Com sempre, i seguint en la línia de totes les eines d'anàlisi freqüencial vistes fins ara, la D.F.T. és també una transformació lineal. Això vol dir que es segueix complint el teorema de la superposició, en aquest cas referent a seqüències finites considerades com a seqüències de la mateixa durada.

Siguin $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dues seqüències finites de durada N i amb D.F.T.s de N punts $X_1[k]$ i $X_2[k]$ respectivament, aleshores la seqüència finita també d' N mostres formada per una combinació lineal d'aquestes seqüències té com a D.F.T. d' N punts la mateixa combinació lineal de les respectives D.F.T.s tal com s'indica a continuació:



$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{D.F.T.} aX_1[k] + bX_2[k]$$

A la pràctica, aquesta propietat es pot aplicar tot i que les seqüències $x_1[n]$ i $x_2[n]$ no siguin de la mateixa longitud. En aquest cas, caldria escollir el valor de N com la durada major d'ambdues seqüències, i afegir zeros a la seqüència de longitud menor (operació que es coneix com a farciment de zeros o *zero padding*).

La demostració d'aquesta propietat és immediata a partir de l'equació d'anàlisi de la D.F.T.

- [Oppenheim1999] p564

Propietat de desplaçament circular

Recordem la propietat de desplaçament temporal de la D.F.S.:

$$\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{D.F.S.} W_N^{km} \tilde{X}[k]$$

Si $\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-rN] = x[\left((n)\right)_N]$ (extensió periòdica de la seqüència finita $x[n]$),

aleshores el desplaçament d' m mostres de $\tilde{x}[n]$ dona lloc al desplaçament circular de

$x[n]$, ja que $x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$. Per tant, l'anterior propietat és equivalent a:

$$x[\left((n-m)\right)_N] \xleftrightarrow{D.F.S.} W^{((k))_N m} \tilde{X}[\left((k)\right)_N]$$

No obstant això, el terme multiplicatiu en freqüència W_N^{km} és, per definició, periòdic i amb període N , amb què es pot ometre l'operador *mòdul* N , quedant:

$$x[\left((n-m)\right)_N] \xleftrightarrow{D.F.S.} W^{km} \tilde{X}[\left((k)\right)_N]$$

Si ara ens quedem amb el període bàsic que va de 0 a $N-1$, tant en el temps com en la freqüència, tenim la propietat de desplaçament circular de la D.F.T.:

$$x[\left((n-m)\right)_N] \xleftrightarrow{D.F.T.} W^{((k))_N m} \tilde{X}[k]$$

En ser la seqüència original $x[n]$ de longitud N , no es pot ometre l'operador de *mòdul* N dins el senyal temporal, mentre que en el domini freqüencial sí, ja que no hi ha cap desplaçament de la seqüència, i si $0 \leq k \leq N-1$, aleshores el senyal està ben definit dins d'aquest interval.

- [Oppenheim1999] p564-p565



Propietat de dualitat

A l'igual que la D.F.S., la D.F.T. també compleix la propietat de dualitat. Concretament l'enunciem de la següent forma:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X[k] \\ X[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} Nx[((-k))_N] \end{aligned}$$

És a dir, que en posar la seqüència que representa el senyal en el domini freqüencial al domini temporal, ens apareix en el domini freqüencial la seqüència $x[n]$ multiplicada per la seva longitud i reordenada inversament en l'índex llevat de la primera mostra (es pot observar que si s'avalua k de 0 a $N-1$, $x[((-k))_N] = x[N-k]$ per $1 \leq k \leq N-1$ i $x[((-k=0))_N] = x[0]$).

Igual que en l'anterior cas, aquesta propietat es fonamenta bàsicament en la *propietat de dualitat* de la D.F.S.

- [Oppenheim1999] p567-p568

Propietats de simetria

Atès que la D.F.T. d'una seqüència $x[n]$ d' N mostres és similar al període bàsic del D.F.S. de la seqüència periòdica $x[((n))_N]$, es poden inferir totes les propietats de simetria del D.F.S. a les *propietats de simetria de la D.F.T.* En primer lloc cal descompondre la seqüència $x[n]$ en una suma de dues seqüències $x_{ep}[n]$ i $x_{op}[n]$ també definides a $0 \leq n \leq N-1$ tal com:

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n]$$

Aquestes dues seqüències corresponen al període bàsic de les seqüències periòdiques conjugada simètrica i conjugada antisimètrica associades al senyal periòdic $x[((n))_N]$, i es poden finalment expressar com:

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[N-n]\} \quad \text{per } 1 \leq n \leq N-1$$

$$x_{ep}[0] = \text{Re}\{x[0]\}$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[N-n]\} \quad \text{per } 1 \leq n \leq N-1$$

$$x_{op}[0] = j \text{Im}\{x[0]\}$$



Quan tractem amb senyals reals (les mostres són escalars dins dels nombres reals), aquestes dues seqüències reben el nom de seqüències *periòdica parella* i *periòdica senar* respectivament.

Una vegada fetes aquestes definicions es pot arribar a les següents *propietats de simetria*:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{x[n]\} &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_{\text{ep}}[k] \\ j \operatorname{Im}\{x[n]\} &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_{\text{op}}[k] \\ x_{\text{ep}}[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} \operatorname{Re}\{X[k]\} \\ x_{\text{op}}[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} j \operatorname{Im}\{X[k]\} \end{aligned}$$

on $x_{\text{ep}}[n] \xleftrightarrow{D.F.T.} X_{\text{ep}}[k]$ i $x_{\text{op}}[n] \xleftrightarrow{D.F.T.} X_{\text{op}}[k]$.

- [Oppenheim1999] p568-p570

Propietat de convolució circular

En l'apartat 3.1.2 varem definir la *convolució periòdica* com una nova operació entre seqüències periòdiques del mateix període N . Recordem que la seqüència resultant era també una seqüència periòdica del mateix període, i que el D.F.S. d'aquesta tenia com a coeficients el producte dels coeficients dels respectius D.F.S. de les seqüències originals. Ara, veiem la propietat que es deriva de relacionar les seqüències periòdiques a seqüències finites de longitud N .

Siguin $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dues seqüències finites de durada N , si definim la seqüència finita $x_3[n]$ resultant de quedar-nos amb un període del resultat d'aplicar la *convolució periòdica* a les extensions periòdiques de les seqüències $x_1[n]$ i $x_2[n]$, és a dir:

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N] \quad \text{per } 0 \leq n \leq N-1$$

Aleshores la D.F.T. d' N punts de la seqüència $x_3[n]$ coincideix amb el producte punt a punt de les D.F.T.s respectives dels senyals $x_1[n]$ i $x_2[n]$, és a dir:

$$X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k] \quad 0 \leq k \leq N-1$$

La demostració d'aquesta propietat és immediata a partir de la propietat de *convolució periòdica* de la D.F.S. Com hem dit, l'extensió periòdica de $x_3[n]$ és la *convolució periòdica* de les seqüències periòdiques $x_1[((n))_N]$ i $x_2[((n))_N]$, i segons aquesta propietat els coeficients del D.F.S. de $x_3[((n))_N]$ s'obtenen fent el producte punt a punt dels de les seqüències originals. Al coincidir els coeficients de la D.F.T. dels senyals amb un període dels coeficients del D.F.S. la validesa de la propietat està demostrada.



Finalment, la propietat l'enunciem de forma abreujada com:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_1[k] \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_2[k] \\ x_1[n] \overset{N}{\Theta} x_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_1[k] \cdot X_2[k] \end{aligned}$$

on definim la *convolució circular* entre dues seqüències de durada N com:

$$x_1[n] \overset{N}{\Theta} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[\left((n-m)\right)_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Aquesta nova operació ens dóna el resultat d'un sol període de la *convolució periòdica* entre les extensions periòdiques de les seqüències $x_1[n]$ i $x_2[n]$. El càlcul es fa desplaçant una seqüència prèviament girada (pot ser qualsevol de les dues, ja que és una operació commutativa) circularment i deixant l'altra quieta. Per cada desplaçament n s'obté una mostra de la seqüència resultant sumant el resultat del producte de les seqüències.

Aplicant la *propietat de dualitat* a la *propietat de convolució circular* es pot arribar a la següent propietat:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_1[k] \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} X_2[k] \\ x_1[n] \cdot x_2[n] &\xleftrightarrow{D.F.T.} \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\Theta} X_2[k] \end{aligned}$$

Aquesta propietat ens diu que el producte punt a punt de dues seqüències de la mateixa durada, produeix una convolució circular de les seqüències freqüencials, amb un factor d'escala $1/N$.

- [Oppenheim1999] p571

3.6.1. Problema 1 de D.F.T.

Calcula la D.F.T. de 5 punts de la seqüència finita $x[n] = u[n] - u[n-5]$. Justifica la relació que hi ha entre el resultat obtingut i el D.F.S. de la seqüència periòdica resultant de repetir $x[n]$ a múltiples de 5 (quedant una seqüència constant i igual a 1). Torna a fer el mateix, però ara agafant el valor d' $N = 10$.

- [Oppenheim1999] p561-p562



RESUM

En aquesta sessió hem vist la definició de la D.F.T. i hem estudiat algunes de les seves propietats, concretament les propietats de linealitat, de desplaçament circular, de dualitat, de simetria i de convolució circular.





SESSIÓ 13

- ❖ Nom: Definició i propietats de la D.F.T. (II)
- ❖ Tipus: de problemes
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem estudiar les propietats bàsiques de la nova eina d'anàlisi freqüencial per a senyals discrets de durada finita.

OBJECTIUS

En aquesta sessió, haureu de realitzar tot un seguit d'exercicis exemple per veure si s'han entès els conceptes de l'anterior sessió.

CONTINGUTS

A continuació se us proposen alguns problemes sobre la D.F.T. i les seves propietats.

3.6.2. Problema 2 de D.F.T.

Donat el següent senyal discret finit:

$$x[n] = 6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5].$$

Calcula i representa el senyal $x_1[n]$ que té per D.F.T. de 6 punts la seqüència

$$X_1[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}2k} X[k] \text{ per } 0 \leq k \leq N-1, \text{ essent } X[k] \text{ la D.F.T. de 6 punts de } x[n].$$

- [Oppenheim1999] p566

3.6.3. Problema 3 de D.F.T.

Sigui la seqüència $x[n] = u[n] - u[n-5]$, calcula i dibuixa la D.F.T. de 10 punts de la seqüència $x_1[n] = X[n]$, on $X[k]$ és la D.F.T. de 10 punts de $x[n]$.



- [Openheim1999] p569

3.6.4. Problema 4 de D.F.T.

Siguin dues seqüències iguals $x_1[n] = x_2[n] = u[n] - u[n-L]$, on L és un enter positiu major que 0. Definim una nova seqüència $x_3[n]$ d' N punts, resultat de fer les següents operacions:

- 1.- $X_1[k] = \text{D.F.T.}_N\{x_1[n]\}$
- 2.- $X_2[k] = \text{D.F.T.}_N\{x_2[n]\}$
- 3.- $X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k] \quad 0 \leq k \leq N-1$
- 4.- $x_3[n] = \text{D.F.T.}_N^{-1}\{X_3[k]\}$

Calcula el senyal resultant $x_3[n]$ per als tres casos següents: $N = L$, $N = 2L$, $N = 3L$.

- [Openheim1999] p573-p575

3.6.5. Problema 5 de D.F.T.

Donada la seqüència discreta:

$$x[n] = \begin{cases} e^{-j\omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

- Calcula la seva T.F.S.D.
- Calcula la seva D.F.T. d' N punts.
- Calcula i representa la D.F.T. d' N punts, per al cas particular on $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k_0$ i k_0 és un nombre enter.

3.6.6. Problema 6 de D.F.T.

Siguin les següents seqüències de 4 punts:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad h[n] = 2^n \quad \text{per } 0 \leq n \leq 3$$

- Calcula la D.F.T. de 4 punts de $x[n]$.
- Calcula la D.F.T. de 4 punts de $h[n]$.
- Calcula $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ directament amb la convolució circular.



d - Calcula l'anterior senyal mitjançant el producte de les D.F.T.s dels senyals originals i antitransformant el resultat.

3.6.7. Problema 7 de D.F.T.

Siguin les seqüències periòdiques següents:

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[\langle\langle n \rangle\rangle_7] \quad \tilde{x}_2[n] = x_2[\langle\langle n \rangle\rangle_7]$$

on $x_1[n] = 6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$ i $x_2[n] = \delta[n]$

Calcula i dibuixa la seqüència $\tilde{x}_3[n]$ periòdica de període 7 mostres amb coeficients de Fourier $\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k]$, on $\tilde{X}_1[k] = \text{D.F.S.}\{\tilde{x}_1[n]\}$ i $\tilde{X}_2[k] = \text{D.F.S.}\{\tilde{x}_2[n]\}$.

3.6.8. Problema 8 de D.F.T.

Siguin dues seqüències finites:

$$x_1[n] = a\delta[n-1] + b\delta[n-2] + c\delta[n-3] + d\delta[n-4] + e\delta[n-5]$$

$$x_2[n] = d\delta[n] + e\delta[n-1] + a\delta[n-5] + b\delta[n-6] + c\delta[n-7]$$

on a, b, c, d i e són escalars.

Determina la relació que hi ha entre els coeficients de les D.F.T.s de 7 punts d'ambdues seqüències.





SESSIÓ 14

- ❖ Nom: Càlcul de la convolució lineal mitjançant la D.F.T.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 5 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem comprovar el grau de comprensió al voltant del capítol 3 definició de la D.F.T. així com de les seves propietats.

OBJECTIUS

En aquesta sessió veurem com podem utilitzar la D.F.T. com a eina de càlcul per filtrar senyals discretes. Es veuran els mètodes de filtratge en el domini freqüencial anomenats *Overlap & Add* i *Overlap & Save*. Totes dues tècniques es basen en la *segmentació* del senyal discret d'entrada, el blocs de durada constant amb o sense solapament. Aquest tipus de processament permet evitar retards de càlcul quan el senyal d'entrada és un senyal de durada indefinida o molt gran (p.ex. el senyal de veu o música), així com optimitzar els cost de càlcul utilitzant la transformada ràpida de Fourier o F.F.T. (*Fast Fourier Transform*) que estudiarem a la següent sessió.

CONTINGUTS

En aquesta sessió introduïrem els conceptes bàsics per fer ús de la D.F.T. per realitzar un filtratge lineal en el domini transformat.

3.7. Càlcul de la convolució lineal amb la D.F.T.

Al capítol 1 vàrem veure la convolució lineal discreta com a eina fonamental per al càlcul de la sortida de sistemes lineals i invariants (S.L.I.T.). Aquesta operació es realitza en el domini temporal i utilitzant el senyal temporal que caracteritza totalment aquest tipus de sistemes: la resposta impulsional del sistema o $h[n]$. Alternativament, sempre es pot recórrer a l'equació en diferències finites a les quals més endavant estudiarem com arribar-hi.

Pel cas de sistemes amb una resposta impulsional finita (F.I.R.) o fins i tot per a sistemes amb resposta impulsional infinita però que pot ser aproximada com a finita (per exemple, en el cas que $\lim_{n \rightarrow \infty} h[n] = 0$ es pot menysprear la cua del senyal), el càlcul de la sortida en el domini temporal es pot implementar amb un registre d'N-1



posicions, N productes (amb els valors no menyspreats de la resposta impulsional) i N-1 sumes.

No obstant això, una tercera alternativa, quan a més de la resposta impulsional també el senyal d'entrada és finit, és realitzar el càlcul del senyal de sortida emprant la representació freqüencial d'aquests senyals mitjançant la D.F.T.

Convolució lineal de dues seqüències finites

Considerem el cas en què es vol calcular la convolució lineal de dues seqüències $x_1[n]$ i $x_2[n]$ de durada L i P mostres respectivament. El resultat d'aquesta convolució serà un senyal $x_3[n]$ també finit i de durada L + P - 1 mostres, i el podem expressar com:

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=\max\{0, n-P\}}^{\min\{L-1, n\}} x_1[m]x_2[n-m]$$

La convolució circular vista com una convolució lineal amb aliàsing temporal

Recordem la propietat de *convolució circular* de la D.F.T. Siguin $X_1[k]$ i $X_2[k]$ les respectives D.F.T.s d'N punts dels senyals (on suposem que $N \geq \max\{L, P\}$, amb el qual es fa, abans de realitzar el càlcul de les D.F.T.s, un farciment de zeros dels senyals de N-L i N-P mostres respectivament). Multiplicar els coeficients $X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k]$ i antitransformar amb l'equació de síntesi de la D.F.T. és equivalent a realitzar la *convolució circular* dels senyals temporals, és a dir:

$$x_{3,p}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[\left((n-m)\right)_N] = x_1[n] \Theta x_2[n]$$

De la discussió vista a l'apartat (*Mostratge de la T.F.S.D.*) recordem que la D.F.T. d'N punts d'un senyal finit equival al mostratge de les pulsacions múltiples de $2\pi/N$ de la T.F.S.D. d'un senyal discret. D'altra banda, si el senyal no era finit i es calculava la D.F.T. inversa d'N punts de la seqüència de mostres de la T.F.S.D., en general s'obtenia un període de la repetició periòdica del senyal original a múltiples d'N.

Si aquest senyal el definim com la convolució lineal de dos senyals finits $x_1[n]$ i $x_2[n]$ de durades L i P mostres respectivament, aleshores la seva T.F.S.D. és:

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

En mostrejar aquesta T.F.S.D. a múltiples de $2\pi/N$ i realitzar la inversió de la D.F.T. d'N punts, pel que s'acaba de recordar, el resultat hauria de donar la repetició periòdica del senyal $x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$, és a dir:



$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_3[n-rN] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Per tant, podem concloure que la convolució circular és totalment equivalent a l'*aliàsing temporal* de la convolució lineal a múltiples d' N . D'aquesta important conclusió podem concloure finalment que la *convolució circular* coincidirà amb la convolució lineal només si es compleix que $N \geq L + P - 1$. Això ho podem expressar matemàticament com segueix:

$$\begin{aligned} x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] &= \text{D.F.T.}^{-1} \{X_1[k] \cdot X_2[k]\} = \text{D.F.T.}_N^{-1} \{ \text{D.F.T.}_N \{x_1[n]\} \cdot \text{D.F.T.}_N \{x_2[n]\} \} = \\ &= x_1[n] * x_2[n] \quad \text{si } N \geq \underbrace{\text{length}\{x_1[n]\}}_L + \underbrace{\text{length}\{x_2[n]\}}_P - 1 \end{aligned}$$

Implementació de S.L.I.T.s amb la D.F.T.

Considerem un sistema discret invariant en el temps amb resposta impulsional finita $h[n]$ de durada L . Si el senyal d'entrada és també un senyal $x[n]$ de durada finita P , aleshores podem realitzar el càlcul de la sortida mitjançant l'ús de la convolució circular però fent les operacions en el domini transformat. Hem vist que si realitzem el càlcul tot aplicant la D.F.T. d' N punts a ambdós senyals, multipliquem punt a punt les seqüències freqüencials $X[k]$ i $H[k]$, i apliquem la D.F.T. inversa d' N punts al resultat, el senyal obtingut coincidirà exactament amb la convolució lineal $x[n] * h[n]$ sempre que es compleixi que $N \geq L + P - 1$.

Cal remarcar que en realitzar les D.F.T.s d' N punts de les seqüències $x[n]$ i $h[n]$ cal abans afegir $N-P$ i $N-L$ zeros al final d'ambdues seqüències respectivament, per tal de normalitzar les durades a N . Aquesta operació es coneix amb el nom de *farçiment de zeros* o *zero padding*.

Aquesta possibilitat de càlcul del senyal de sortida del sistema $y[n]$ és només aplicable a casos en què el senyal d'entrada és un senyal finit i de durada no molt gran. A la pràctica, i com veurem més endavant, l'estalvi computacional es produeix quan la durada dels senyals implicats en la convolució no és molt gran. A més a més, no cal perdre de vista que aquest tipus de processament implica un retard igual, com a mínim, a la durada del senyal $x[n]$, ja que se suposa que la resposta impulsional és un senyal conegut *a priori*.

La convolució a blocs pel filtratge en el domini freqüencial de senyals de durada indefinida: mètode *Overlap & Add*

En moltes aplicacions, generalment el senyal d'entrada és un senyal de durada indefinida o bé força llarga (per exemple, en aplicacions de veu, àudio, etc...), amb què és del tot inviable considerar totes les mostres del senyal d'entrada com un bloc finit de dades previ al seu processament. Això suposaria la necessitat de molta memòria i cost



computacional, i sobretot, de massa retard de processament. Per tal de simplificar el problema, una possible solució és treballar amb blocs de longitud constant L del senyal d'entrada. El processament a blocs permet beneficiar-nos d'un estalvi computacional utilitzant el procés de filtratge explicat amb l'ús de la D.F.T. alhora que possibilita un major grau de paral·lelització en la implementació algorísmica del problema.

Considerem un filtre discret amb resposta impulsional $h[n]$ de durada P , i un senyal d'entrada $x[n]$ que és zero per $n < 0$ i de durada molt major que P . Dita seqüència es pot representar mitjançant la concatenació de blocs de mostres de durada L tal com:

$$x[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} x_r[n - rL]$$

on $x_r[n]$ és el bloc r -èssim i representen les mostres que van de $n = rL$ a $n = rL + L - 1$ del senyal d'entrada. No obstant això, els blocs els expressem com si estiguessin dins el període de temps $n \in [0, L - 1]$, de forma que en desplaçar-los a múltiples d' L els situem en la seva ubicació correcta dins $x[n]$. Aquest procediment rep el nom de *segmentació* del senyal.

Atès que la convolució és una operació invariant en el temps, el senyal de sortida $y[n]$ el podem expressar també amb segments tal com segueix:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} y_r[n - rL]$$

on:

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]$$

A diferència del senyal d'entrada, no obstant, els segments del senyal de sortida, $y_r[n]$, tenen una durada d' $L+P-1$ mostres, ja que els segments d'entrada són de durada L i la resposta impulsional és de durada P . Per tant, això suposa que en desplaçar el resultat de cadascuna de les convolucions dels segments a múltiples d' L hi haurà una superposició de $P-1$ mostres entre segments adjacents.

Cadascuna de les convolucions dels segments d'entrada amb la resposta impulsional es pot realitzar mitjançant la D.F.T. d' N punts, escollint que $N \geq L + P - 1$. Per tant podríem obtenir el resultat parcial del segment r -èssim amb:

$$y_r[n] = \text{D.F.T.}_N^{-1} \{ \text{D.F.T.}_N \{ x_r[n] \} \times \text{D.F.T.}_N \{ h[n] \} \}$$

on s'ha fet el corresponent *farçiment de zeros* de les seqüències abans de fer les D.F.T.s.

Aquest procediment de càlcul de la convolució es coneix amb el nom d'*Overlap & Add Method* i es refereix al fet que els segments de sortida $y_r[n]$ s'han de desplaçar a les posicions múltiples d' L corresponents, superposar i sumar les regions de $P-1$ mostres superposades.



La convolució a blocs pel filtratge en el domini freqüencial de senyals de durada indefinida: mètode *Overlap & Save*

Existeix un mètode alternatiu al filtratge per blocs explicat fins ara. Aquest segon mètode rep el nom de *Overlap & Save Method*. La diferència principal és que en aquest cas no cal sumar porcions de senyals superposats al final de tot, i que els blocs consecutius d'entrada comparteixen un conjunt de $P-1$ mostres. Concretament, els blocs d'entrada es defineixen ara com:

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1] \quad \text{per } 0 \leq n \leq L - 1$$

on es treballa sempre amb $L > P$ (longitud dels blocs majors que la resposta impulsional).

Una vegada es disposa dels segments del senyal d'entrada es procedeix a realitzar el càlcul de la *convolució periòdica* d' $N = L$ mostres entre $x_r[n]$ i $h[n]$. Aquesta operació la farem mitjançant l'ús de la D.F.T. d' $N = L$ punts. Clarament, el resultat tindrà la mateixa durada d' L mostres, però en haver escollit $N = L$ la *convolució circular no coincidirà amb la convolució lineal*. És per aquest motiu que el desfusatge entre blocs d'entrada és de $L - P + 1$ mostres enlloc de L . Com hem dit que $L > P$, el resultat de la convolució circular coincidirà amb la convolució lineal excepte les primeres $P-1$ mostres. Vegem-ho:

$$\begin{aligned} y_{rp}[n] &= x_r[n] \otimes h[n] = \text{D.F.T.}_L^{-1} \{ \text{D.F.T.}_L \{ x_r[n] \} \times \text{D.F.T.}_L \{ h[n] \} \} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y'_r[n - kL] \quad \text{per } 0 \leq n \leq L - 1 \end{aligned}$$

on $y'_r[n] = x_r[n] * h[n]$ és el resultat de la convolució lineal, i conseqüentment la seva durada és d' $L + P - 1$ mostres. Per tant, amb l'anterior expressió es pot intuir que el resultat de la convolució circular coincidirà amb la convolució lineal en el marge de valors:

$$y_{rp}[n] = y'_r[n] \quad \text{per } P - 1 \leq n \leq L - 1$$

mentre que en l'interval inicial hi haurà *aliàsing temporal*:

$$y_{rp}[n] = y'_r[n + L] + y'_r[n] \quad \text{per } 0 \leq n \leq P - 2$$

Així doncs, es reconstruirà el senyal de sortida del filtre concatenant les $L - P + 1$ mostres útils del resultat de la convolució circular segons:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{+\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1]$$

on els segments $y_r[n]$ de sortida es defineixen com:

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n] & P - 1 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$



La justificació del nom del mètode es fonamenta en el fet que els segments d'entrada tenen parts en comú, amb què una vegada processat un segment d'entrada cal guardar (*save*) les últimes P-1 mostres per processar el següent segment.

- *[Oppenheim1999] p582-p588*



SESSIÓ 15

- ❖ Nom: La transformada ràpida de Fourier (F.F.T.)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A la sessió anterior vàrem estudiar la implementació de sistemes lineals i invariants discrets mitjançant la D.F.T. Vàrem veure com podem realitzar el filtratge de senyals de durada indefinida tot fent una segmentació i fent les operacions en el domini freqüencial.

OBJECTIUS

L'objectiu d'aquesta sessió és introduir a l'alumne nous mètodes eficients de càlcul de la D.F.T., per tal d'optimitzar (en temps de computació principalment) aplicacions que requereixin d'un l'anàlisi espectral de senyal.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem algorismes eficients de càlcul de la D.F.T. que permeten reduir notablement el cost computacional de processament. Treballarem amb l'algoritme de càlcul definit com la transformada ràpida de Fourier o F.F.T. (*Fast Fourier Transform*).

3.8. La Transformada ràpida de Fourier (F.F.T.)

A l'apartat 3.1.7 vàrem definir les equacions de càlcul de la D.F.T. d' N punts d'una seqüència finita $x[n]$ tal com:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad \text{per } 0 \leq k \leq N-1 \quad \text{Equació d'anàlisi}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad \text{per } 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{Equació de síntesi}$$

on, per definició, $W_N \stackrel{\text{Def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

En principi, tant el senyal temporal com freqüencial poden tenir valors complexos. D'altra banda, totes dues equacions són gairebé idèntiques quant a càlcul es refereix.



D'aquesta afirmació sorgeix la *propietat de dualitat* de la D.F.T. Per tant, totes les simplificacions que podem fer envers la primera expressió (D.F.T. directa) es poden després aplicar de forma gairebé directa a la segona equació (D.F.T. inversa).

Avaluació del cost computacional de la D.F.T.

En aquest apartat avaluarem el cost computacional necessari per calcular els valors de la seqüència freqüencial $X[k]$ a partir dels valors de la seqüència temporal $x[n]$ mitjançant l'equació d'anàlisi de la D.F.T.

Observem que per calcular cada mostra de $X[k]$ calen N productes complexos i $N-1$ sumes complexos. En ser una seqüència d' N punts, en total calen N^2 productes complexos i $N(N-1)$ sumes complexos. Cada producte complex requereix de 4 productes reals i 2 sumes reals, mentre que cada suma complexa requereix de 2 sumes reals. Per tant, el cost computacional en operacions amb reals és de $4N^2$ productes i $N(4N-2)$ sumes. En general es diu que la complexitat de càlcul és d'ordre N^2 , i per tant es pot observar que el temps de càlcul creix de forma quadràtica amb la durada dels senyals. Això pot representar un cost prohibitiu si N és molt gran.

Els algorismes de simplificació de càlcul de la F.F.T. exploten les propietats de simetria i de periodicitat de les exponencials complexes $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

F.F.T. amb delmació en el temps

Aquest algorisme es basa en la descomposició successiva de la seqüència temporal $x[n]$ en subseqüències de menor durada. En principi, aquesta simplificació s'ha de considerar quan la durada del senyal és una potència de 2, és a dir: $N = 2^v$, on v és un enter positiu.

Si separem la suma de l'equació d'anàlisi de la D.F.T. considerant els valors parells i senars d' n per separat:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{k(2r+1)} = \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r](W_N^2)^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1](W_N^2)^{kr} \end{aligned}$$

Observem que $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$, per tant:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_{N/2}^{kr} = G[k] + W_N^k H[k] \quad \text{per } 0 \leq k \leq N-1$$



on $G[k] = \text{D.F.T.}_{N/2} \{x[2n]\}$ (D.F.T. de $N/2$ punts de la seqüència de mostres parelles de $x[n]$) i $H[k] = \text{D.F.T.}_{N/2} \{x[2n+1]\}$ (D.F.T. de $N/2$ punts de la seqüència formada per les mostres senars).

Recordem que la D.F.T. corresponia a l'avaluació d'un període de la seqüència periòdica formada pels coeficients del D.F.S. del senyal format per la repetició periòdica del senyal finit sota anàlisi. Per tant, tot i ser les seqüències freqüencials $G[k]$ i $H[k]$ de durada $N/2$, en avaluar-les fora d'aquest interval tornem a trobar-nos amb els mateixos coeficients. Així doncs, una expressió equivalent que tindria en compte això seria:

$$X[k] = \begin{cases} G[k] + W_N^k H[k] & \text{per } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \\ G[k - N/2] + W_N^k H[k - N/2] & \text{per } N/2 \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

Com a exemple, vegeu la figura 9.3 de la pàgina 636 del llibre, on es mostra el diagrama de blocs de la simplificació feta en el cas $N = 8$. Es pot observar com les dades de les dues D.F.T.s d' $N/2 = 4$ punts de les seqüències parell i senar s'utilitzen per duplicat per generar dues mostres de la D.F.T. d' $N = 8$ punts de la seqüència total. No obstant això, el coeficient de guany W_N^k és diferent per a cada índex freqüencial, donant lloc a valors diferents.

$$X[0] = G[0] + H[0], \text{ en canvi } X[4] = G[0] + W_8^4 H[0] = G[0] - H[0].$$

Cost computacional de la F.F.T. amb delmació en el temps

Abans hem vist que el cost en operacions per al càlcul d'una D.F.T. d' N punts era de l'ordre de N^2 (suposant el valor d' N prou gran es pot aproximar que és el nombre de multiplicacions i de sumes complexes). Avaluem el cost de càlcul quan realitzem la simplificació proposada a l'anterior apartat. Per a realitzar una sola T. de $N/2$ punts, calen de l'ordre de $(N/2)^2$ sumes i productes complexos. En tractar-se de dues D.F.T.s, en total calen $2(N/2)^2$ sumes i productes complexos. Finalment, la *recombinació* dels resultats d'aquestes dues D.F.T.s per tal de tenir el resultat de la D.F.T. d' N punts requereix d' N sumes i N productes complexos. En definitiva, calen $N + N^2/2$ sumes i productes complexos. Podeu comprovar que el nombre d'operacions en aquest cas és menor que en el càlcul directe, sempre que $N > 2$. És a dir:

$$N + N^2/2 < N^2 \quad \text{per } N > 2$$

... per tant sembla que hi ha un cert *estalvi computacional*.



Subdivisió successiva amb papallones

Al primer apartat hem vist com el càlcul de la D.F.T. d' N punts $X[k]$ es pot simplificar dividint-lo en el càlcul de dues D.F.T.s de $N/2$ punts $G[k]$ i $H[k]$. A l'anterior apartat hem conclòs que això pot suposar un cert estalvi computacional.

Si, com hem dit inicialment, N és una potència de 2, $N = 2^v$ aleshores la durada d'ambdues seqüències $G[k]$ i $H[k]$ serà també una potència de 2 ($N/2 = 2^{v-1}$), i conseqüentment un nombre parell. Això ens permet tornar a simplificar el càlcul de cada D.F.T.s d' $N/2$ punts tot descomponent-la en dues D.F.T.s de $N/4 = 2^{v-2}$ punts, i així successivament. Si expressem la segona descomposició ens queda de la següent forma:

$$X_p[k] = \begin{cases} X_{pp}[k] + W_{N/2}^k X_{ps}[k] & 0 \leq k \leq N/4 - 1 \\ X_{pp}[k - N/4] + W_{N/2}^k X_{ps}[k - N/4] & N/4 \leq k \leq N/2 - 1 \end{cases}$$

$$X_s[k] = \begin{cases} X_{sp}[k] + W_{N/2}^k X_{ss}[k] & 0 \leq k \leq N/4 - 1 \\ X_{sp}[k + N/4] + W_{N/2}^k X_{ss}[k + N/4] & N/4 \leq k \leq N/2 - 1 \end{cases}$$

on $G[k]$ i $H[k]$ s'han redefinit com $X_p[k]$ (D.F.T. d' $N/2$ punts de la seqüència de punts *parells*) i $X_s[k]$ (D.F.T. d' $N/2$ punts de la seqüència de punts *senars*) respectivament.

Així, $X_{pp}[k]$ fa referència a la D.F.T. d' $N/4$ punts de la seqüència de punts *parells* de la seqüència de punts *parells* de $x[n]$, o el que és el mateix, de la seqüència formada per mostres agafades de 4 en quatre a partir de la mostra 0: $x_{pp}[n] = x[2(2n)] = x[4n]$. Anàlogament banda, $X_{ps}[k]$ és la D.F.T. de $N/4$ punts de la seqüència $x_{ps}[n] = x[2(2n+1)] = x[4n+2]$.

Després de la primera etapa de la descomposició teníem dos D.F.T.s de durada $N/2 = 2^{v-1}$. Després de la segona etapa, les D.F.T.s són quatre i la seva durada és de $N/4 = 2^{v-2}$ punts. Al cap de $v-1$ etapes, tindrem un total de 2^{v-1} D.F.T.s de $N/2^{v-1} = 2$ punts. Per a realitzar el càlcul d'una D.F.T. de 2 punts utilitzarem l'expressió d'anàlisi de la D.F.T. Per exemple, la primera a realitzar serà la seqüència *parella* de la seqüència *parella* de ... ($v-1$ cops) ... de la seqüència *parella* de $x[n]$, és a dir, $x[2^{v-1}n] = x[nN/2] = \{x[0], x[N/2]\}$. La seva D.F.T. de 2 punts la calcularem com:

$$X_{pp\dots p}[k] = \sum_{n=0}^1 x_{pp\dots p}[n] \cdot W_2^{kn} = x[0] \cdot W_2^0 + x[N/2] \cdot W_2^k = x[0] + (-1)^k x[N/2] \quad k = 0,1$$

És a dir, que es tracta d'una suma i una resta de dos valors temporals.

Una vegada calculades les $N/2$ D.F.T.s de dos punts, utilitzant les diferents subseqüències formades per determinades mostres (mai es repeteixen), cal realitzar



un procés de *recombinació*, en el qual es fan servir unitats de recombinació binàries (és a dir, que utilitzen dues mostres per tal de donar lloc a dues mostres recombinades) i que reben el nom de *papallones*.

Per exemple, en la primera etapa per al cas d' $N = 8$ (vegeu figura 9.7 de la pàgina 639 de [Oppenheim1999]), una *papallona* és la que s'utilitza per tal de calcular $X[0]$ i $X[4]$ a partir dels valors de $G[0]$ i $H[0]$, i es defineix amb les operacions ja esmentades a l'inici de l'apartat:

$$\begin{aligned} X[0] &= G[0] + W_8^0 H[0] = G[0] + H[0] \\ X[4] &= G[0] + W_8^4 H[0] = G[0] - H[0] \end{aligned}$$

El nom de *papallona* s'atribueix a la forma de l'etapa de càlcul (dues línies paral·leles i dues línies creuades amb els pesos que s'uneixen per a sumar els resultats).

En general, a l'etapa m -èsima (on $0 \leq m \leq \nu - 1$), una *papallona* estarà formada per dos sumadors i un multiplicador per nombres complexos. Si les entrades són a i b (de l'etapa $m-1$), les sortides c i d (de l'etapa m) es poden expressar com:

$$\begin{aligned} c &= a + W_{N/2^m}^r b = a + W_N^{r2^m} b \\ d &= a + W_{N/2^m}^{r+N/2^{(m+1)}} b = a + W_N^{(r+N/2^{(m+1)})2^m} b = a + W_N^{r2^m} \underbrace{W_N^{N/2}}_{-1} b = a - W_N^{r2^m} b \end{aligned}$$

Per tant, l'etapa es pot implementar amb la figura 9.9 de la pàgina 640 de [Oppenheim1999].

Cost de càlcul total

Cada etapa m -èsima requereix un total d' $N/2$ *papallones* (veure l'exemple de la figura 9.7 de la pàgina 639 de [Oppenheim1999]). Cada *papallona*, com hem conclòs en l'apartat anterior, utilitza dues sumes i un producte de complexos. D'altra banda, en haver un total de $\nu = \log_2 N$ etapes, en total es requereixen de l'ordre de $N \log_2 N$ sumes i la meitat de productes complexos.

Si comparem la complexitat total per a valors grans d' N , per exemple $N = 1024$ (10 etapes), el càlcul de la D.F.T. pel procediment convencional requeria de l'ordre d' $N^2 = 1.048.576$ operacions complexos, mentre que amb el mètode de la F.F.T. només fan falta $N \log_2 N = 10.240$ operacions complexos. Per tant, sembla que l'estalvi computacional és considerable per a valors. A la següent taula es pot apreciar la reducció del cost computacional en funció del nombre de punts de la D.F.T.:



N	Cost Directe N^2	Cost F.F.T. $N \log_2 N$	% Cost F.F.T. respecte càlcul directe
4	16	8	50
8	64	24	37,5
16	256	64	25
32	1024	160	15,6
64	4096	384	9,4
128	16384	896	5,5
256	65536	2048	3,1
512	262144	4608	1,8

Estalvi computacional de la F.F.T. per al filtratge de senyals

Com ja s'ha vist, l'ús de la F.F.T. com a eina alternativa de càlcul de la D.F.T. ens aporta un estalvi computacional important, sobretot quan la longitud del bloc és elevada. Com ja es va estudiar a la sessió anterior, la D.F.T. és una eina també alternativa per al filtratge digital de senyals. Ara ja estem en condicions de veure que aquesta és una alternativa que pot justificar-se com a eficient des del punt de vista computacional. És precisament gràcies a la F.F.T. que el filtratge en el domini freqüencial pot arribar a simplificar les operacions implicades en el procés.

Recordem que, en general, es vol filtrar senyals de durada indefinida com poden ser senyals de veu. No obstant això, la longitud de la resposta impulsional és coneguda i igual a P . En subdividir el senyal d'entrada en blocs d' L mostres, obtenim el resultat del senyal de sortida a partir del solapament cada L mostres (mètode d'*Overlap & Add*) de les I.D.F.T.s d' N punts del producte de les D.F.T.s d' N punts dels blocs del senyal d'entrada per la de la resposta impulsional. El mètode era vàlid sempre que $N \geq L + P - 1$.

Si es realitza el filtratge mitjançant la convolució lineal en el temps, aleshores per cada mostra de sortida fan falta P productes i $P-1$ sumes:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k]$$

Amb el mètode d'*Overlap & Add*, avaluem primer el cost computacional per bloc d' L mostres i dividim al final per L per trobar el cost computacional per mostra de sortida. Resumim el procediment de càlcul per bloc de sortida:

1 - D.F.T. d' N punts del bloc d'entrada:

$$X_r[k] = D.F.T._N \{x[n+rL], 0 \leq n \leq N-1\}$$

2 - Producte de les seqüències en el domini freqüencial:



$$Y_r[k] = H[k] \times X_r[k] \quad 0 \leq k \leq N-1$$

3 - D.F.T. inversa del bloc de sortida:

$$y_r[n] = I.D.F.T._N \{Y_r[k]\}$$

4 - Solapament dels bloc de sortida amb el bloc anterior:

$$y[n+rL] = \begin{cases} y_{r-1}[L+n] + y_r[n] & 0 \leq n \leq N-L-1 \\ y_r[n] & N-L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Si tant les D.F.T.s com les I.D.F.T.s s'implementen amb la simplificació de la F.F.T. es requereixen de l'ordre de $N \log_2 N$ operacions complexes. El pas 2 requereix només N productes complexos, mentre que el pas 4 només N-L sumes. En total, es necessiten de l'ordre de $2N \log_2 N + 2N - L$ operacions per bloc d'L mostres. D'altra banda, per realitzar el càlcul d'L mostres de sortida caldrien LxP operacions. El % de cost computacional final respecte l'inicial el podem expressar com:

$$100 \frac{2N \log_2 N + 2N - L}{LP} = 100 \frac{2N \log_2 N + 2N - L}{LP}$$

Per tal d'assolir algun estalvi computacional, és adient complir:

$$P > \frac{2N(\log_2 N + 1) - L}{L} \approx \frac{2N(\log_2 N + 1)}{N} = P_{\min}$$

on l'aproximació s'ha fet suposant que $P \ll L$, per tal de fer les F.F.T.s del màxim de punts possible. D'aquesta forma l'estalvi computacional serà major.

A la següent taula es mostra a partir de quina longitud P_{\min} del filtre F.I.R. surt a compte realitzar els càlculs amb el procediment d'*Overlap & Add* amb la F.F.T.:

N	P_{\min}	% Cost final (P = 50 i L = N - P + 1)
64	14	58,7
128	16	24,9
256	18	21,3
512	20	21,1
1024	22	22,1
2048	24	23,6
4096	26	25,3

- [Oppenheim1999] p629-p643





SESSIÓ 16

- ❖ Nom: Introducció a la transformada Z
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors hem estat tractant el tema de la D.F.T. Hem vist les característiques de la transformada discreta de Fourier així com aplicacions al filtratge en el domini freqüencial. També hem pogut veure la relació existent entre els coeficients de la D.F.T. i la T.F.S.D. del senyal de durada finita.

OBJECTIUS

En aquesta sessió presentarem la transformada Z. Aquesta transformada és una eina d'anàlisi matemàtic sobre el pla complex que ens ajudarà a estudiar senyals i sistemes discrets. En aquesta sessió exposarem les seves característiques fonamentals que la fan interessant de cara a l'estudi de sistemes discrets.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem la definició de la transformada Z, la seva relació amb la T.F.S.D., la seva existència, i els conceptes de pals i zeros.

4. La transformada Z

4.1. Introducció

En el capítol 2 vàrem estudiar les propietats de la T.F.S.D. en l'estudi de senyals i sistemes discrets i vam poder comprovar que representa una funció clau en l'estudi d'aquest tipus de sistemes. En aquest capítol estudiarem les característiques de la transformada Z. La transformada Z és una generalització de la T.F.S.D. i representa el mateix paper que la transformada de Laplace en el domini analògic.

La transformada Z presenta dos avantatges fonamentals respecte a la T.F.S.D. en l'estudi de sistemes. D'una banda, en ser una generalització dintre de tot el pla complex, ens permetrà l'estudi de senyals que no admetien T.F.S.D. per problemes de convergència. Es tracta d'una transformada que permet l'estudi d'un ventall més ampli



de senyals. D'altra banda, un altre aspecte motivant de la transformada Z és que utilitza una notació més senzilla i facilita l'estudi de problemes analítics ja que es pot expressar en notació polinòmica.

4.2. Definició de la transformada Z

La transformada Z d'una seqüència es defineix segons

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad z \in C$$

Tal i com podem observar en la seva definició, aquesta transformada és molt similar a l'expressió de la T.F.S.D. $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ i com veurem més endavant existeix una relació important entre ambdues transformades.

Relació de la transformada Z amb la T.F.S.D.

Tal i com es pot deduir de l'expressió anterior, existeix una relació directa entre la transformada Z d'una seqüència i la seva T.F.S.D. Concretament, si la variable z que pertany al complex la substituïm per $z = e^{j\omega}$ ambdues transformades serien coincidents. Es pot arribar clarament a la deducció que la T.F.S.D. no es més que una particularització de la transformada Z.

La variable z es pot expressar de forma polar segons la següent expressió $z = re^{j\omega}$ de tal forma que avaluem tot el pla complex amb circumferències de radi r. Aquesta forma d'expressar la transformada ens porta directament a la relació existent entre la transformada Z i la T.F.S.D. Fent aquesta substitució, la transformada Z quedaria expressada de la següent forma

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

De l'expressió anterior podem observar que la transformada Z no és més que la T.F.S.D. de la seqüència $x[n]r^{-n}$ i que ambdues són coincidents quan $r=1$, és a dir, la T.F.S.D. d'una seqüència és la transformada Z avaluada en el cercle unitat dintre del pla complex.

- [Oppenheim1999] p94-p96

Existència de la Transformada Z

D'igual forma que en el cas de la T.F.S.D., l'existència de la transformada Z dependrà que el sumatori de l'expressió de càlcul sigui un valor finit. En el cas de la T.F.S.D.



vàrem veure que la transformada existia per al cas de senyals sumables en valor absolut. En el cas de la transformada Z no avaluem únicament el cercle unitat sinó que avaluem tot el pla complex. Conseqüentment, l'existència de la transformada Z es donarà només en certes regions on es compleixi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$ seguint el mateix criteri que es va seguir en la T.F.S.D.

Com es pot despendre de l'expressió, l'existència de la transformada Z dependrà únicament del paràmetre r . Aquest fet dóna lloc a l'aparició d'un concepte nou, el R.O.C. (*Region Of Convergence*) com aquella zona del pla complex on existeix la transformada.

- [Oppenheim1999] p95-p98

Pals i zeros d'una transformada

Un dels grans avantatges de la transformada Z és que existeixen un gran nombre de senyals que tenen com a transformada una expressió racional del tipus $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ on $P(z)$ i $Q(z)$ són polinomis en z . Tenint en compte aquesta definició veiem que existiran determinats valors de la variable z que faran que l'expressió sigui 0 i existiran determinats valors que la faran infinit. Els zeros del polinomi $P(z)$ són els valors que fan que l'expressió tingui valor zero i es coneixen com els zeros de la transformada. D'altra banda, els zeros del polinomi $Q(z)$ són els valors que fan que la transformada tingui valor infinit i es coneixen com el pals de la transformada.

Els zeros i pals són valor molt interessants de cara a l'estudi de senyals i sistemes, ja que ens poden oferir una idea de com es comporta el sistema en funció de la distribució dels pals i zeros dintre del pla complex. D'altra banda, com veurem més endavant la posició dels pals condicionarà la regió de convergència de la transformada R.O.C., ja que són punts singulars que en provoquen la divergència.

- [Oppenheim1999] p97-p98

4.2.1. Problema: Càlcul de la transformada Z

Considerem la seqüència $x[n] = a^n u[n]$. Atès que només té valors diferents de zero per $n \geq 0$ la definirem com una seqüència orientada a dreta, ja que comença en un determinat índex n i dura fins a l'infinit.

Trobeu la transformada Z i la regió de convergència d'aquesta seqüència.

- [Oppenheim1999] p98 (exemple 3.1.)



4.2.2. Problema: Exponencial orientada a esquerra.

Considereu la seqüència $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Aquesta seqüència, a diferència de la de l'apartat anterior comença en menys infinit i arriba fins $n=-1$. Les seqüències que comencen a menys infinit i duren fins a un determinat índex n es denominen seqüències orientades a esquerra.

Trobeu la transformada Z i la regió de convergència d'aquesta seqüència.

- [Oppenheim1999] p98 (exemple 3.1.)

RESUM

En aquesta sessió hem vist la introducció a la transformada Z. Hem estudiat també la relació existent entre la transformada Z i la T.F.S.D. i s'han definit conceptes bàsics com el R.O.C. o regió del pla complex on existeix la transformada. Finalment s'han estudiat dos problemes on s'analitza la transformada Z de seqüències exponencials orientades a dreta i a esquerra comprovant la coincidència de les seves transformades i que la única diferència radica en el R.O.C. de cadascuna de les transformades.



SESSIÓ 17

- ❖ Nom: Propietats de la regió de convergència
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem estudiar la introducció a la transformada Z. Un dels punts més interessants a remarcar en aquest estudi és el R.O.C. o regió de convergència. El R.O.C. es defineix com aquella regió del pla Z en la qual el sumatori de la transformada té un valor acotat. Aquesta és una de les diferències importants respecte a la T.F.S.D., la transformada Z no existirà generalment en tot el pla complex Z però sí que podrem determinar aquella regió en què existeix. El coneixement d'aquesta regió és fonamental de cara a dur l'estudi de senyals i sistemes.

OBJECTIUS

En aquesta sessió treballarem amb intensitat els conceptes més importants lligats al R.O.C. així com les característiques que compleix la regió de convergència.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem les propietats de la regió de convergència, fonamentals per tal d'entendre la relació entre els senyals temporals i la seva representació amb la transformada Z.

4.3. Propietats de la regió de convergència de la transformada Z

En la sessió anterior vàrem veure les condicions d'existència de la transformada Z. Vam arribar a la conclusió que la transformada Z existeix sempre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

ja que la transformada Z es pot expressar segons



$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

quan es fa la substitució $z = re^{j\omega}$.

En la sessió anterior vàrem arribar a la conclusió que la convergència o no convergència de l'expressió depèn exclusivament del mòdul de la variable complexa z .

Aquesta important característica indueix certes propietats de la regió de convergència que analitzarem seguidament.

Propietat 1

La regió de convergència és un anell o un disc en el pla z centrat a l'origen $0 \leq r_R < z < r_L \leq \infty$.

Aquesta propietat té sentit de ser segons la conclusió que el R.O.C. només depèn del mòdul de la transformada z . La morfologia de la regió vindrà determinada per circumferències centrades a l'origen.

Propietat 2

La T.F.S.D. d'una seqüència $x[n]$ existeix sempre que la regió de convergència inclogui el cercle unitat.

Recordem que si avaluem la transformada z a $z = e^{j\omega}$ estem avaluant la T.F.S.D., conseqüentment la transformada de Fourier existirà sempre que el cercle unitat estigui dintre del R.O.C. de la transformada z .

Propietat 3

El R.O.C. mai conté pals.

Aquesta propietat es dedueix de forma senzilla segons la definició de pal de la transformada. Recordem que un pal era un zero del denominador, és a dir, un valor de la variable complexa z en el qual la transformada prendrà valor infinit. Per definició un pal no pot estar dintre de la regió de convergència.

Propietat 4

Si $x[n]$ és una seqüència de durada finita, el R.O.C. de la transformada és tot el pla z excepte els valors $z=0$ i $z = \infty$ que poden estar o no inclosos.

Si la seqüència és de durada finita, el sumatori de la transformada serà un sumatori finit, evitant-se qualsevol problema de convergència excepte per dos valors de la



variable z , el zero i l'infinit. Si la seqüència té algun valor diferent de zero per valors de n negatius $-n_0$ tindrà termes del tipus $\dots + x[-n_0]z^{n_0} + \dots$ i en aquests casos el valor infinit no estarà inclòs en la regió de convergència perquè aquest terme es faria infinit.

D'altra banda, si la seqüència té valors diferents de zero per algun valor d' n positiu n_0 tindrà algun terme del tipus $\dots + x[n_0]z^{-n_0} + \dots$ i en aquest cas serà el valor $z=0$ el que faria divergir el sumatori.

Segons el moment en què comenci i en què acabi la seqüència pot ser que els valors $z=0$ i $z = \infty$ estiguin o no estiguin inclosos en el R.O.C. de la transformada.

Propietat 5

Si $x[n]$ és una seqüència orientada a dreta (seqüència amb valor $x[n]=0$ per $n < N_1 < \infty$), la regió de convergència és l'exterior d'un cercle delimitat pel pal de mòdul màxim fins a l'infinit, que pot o no pot estar inclòs.

Propietat 6

Si $x[n]$ és una seqüència orientada a esquerra (seqüència amb valor $x[n]=0$ per $n > N_2 > -\infty$), la regió de convergència és l'interior d'un cercle delimitat pel pal de mòdul mínim fins al zero, que pot o no pot estar inclòs.

Propietat 7

Si la seqüència $x[n]$ està orientada a dues bandes i té durada infinita, el R.O.C. serà un anell en el pla z , delimitat en el seu interior i en el seu exterior per pals i consistent en la propietat 3, és a dir, sense contenir cap pal dintre de la seqüència.

Propietat 8

El R.O.C. és una regió connexa.

- [Oppenheim1999] p105 (apartat 3.2)

RESUM

En aquesta sessió s'han estudiat les propietats més importants relacionades amb la regió de convergència de la transformada z . La determinació de la regió de convergència així com les seues característiques són fonamentals de cara a determinar quina és la seqüència temporal associada a una certa expressió $X(z)$. D'altra banda, la regió de convergència està directament lligada a la posició dels pals



de la transformada, ja que els pals són punts singulars del denominador que provoquen la divergència del sumatori. La posició dels pals fixarà els límits del R.O.C. però els pals mai podran estar continguts dintre de la regió de convergència.



SESSIÓ 18

- ❖ Nom: Propietats de la transformada Z
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3.5 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior vàrem descriure les característiques fonamentals de la transformada Z així com les propietats més importants lligades a la regió de convergència, un tret diferencial respecte a la T.F.S.D. Tots els conceptes estudiats fins ara han estat una presentació de la transformada Z i una justificació de la seva aplicació a l'estudi de senyals i sistemes discrets.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem les propietats de la transformada Z. Aquestes propietats ens serviran per poder realitzar càlculs de transformades directes i transformades inverses, i d'altra banda, també seran molt importants de cara a lligar les equacions lineals en diferències amb l'estudi i disseny de sistemes discrets.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem les principals propietats de la transformada Z: linealitat, desplaçament temporal, multiplicació per una seqüència exponencial, diferenciació en el domini Z, conjugació en el temps, reflexió temporal, convolució i teorema del valor inicial.

4.4. Propietats de la transformada Z

4.4.1. Propietat de linealitat

La propietat de linealitat és una propietat força comú en les transformades que apareixen en aquest curs. Atès que l'estudi que fem és el de senyals i sistemes lineals, tota transformada útil per a l'estudi d'aquest conjunt de senyals i sistemes haurà de tenir la propietat de linealitat.

Considerant dos seqüències tal i com es defineix en la següent expressió



$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC = R_{x_1}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC = R_{x_2}$$

la propietat de linealitat de la transformada ens diu que

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Com es pot observar en la propietat anterior, en el cas de la transformada Z s'ha de fer referència sempre a les modificacions de la regió de convergència en aplicar la propietat ja que tota transformada Z ha de portar la definició del R.O.C. associat.

Com podem veure en l'expressió de la propietat, la regió de convergència de la seqüència resultant serà la intersecció de les regions de convergència de les seqüències originals, ja que només serà convergent quant totes dues seqüències convergeixin.

- [Oppenheim1999] p119 (apartat 3.4.1.)

4.4.2. Desplaçament temporal

La propietat de desplaçament temporal fa referència a l'efecte en el domini transformat (Z) d'un desplaçament temporal de la seqüència original, així com els efectes que això pugui tenir en la regió de convergència de la mateixa. Aquesta propietat a més de tenir utilitat en el càlcul de transformades directes i transformades inverses és molt útil en el càlcul de transformades associades a les equacions lineals en diferències tal i com veurem més endavant en el capítol.

Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC = R_x$ la propietat de desplaçament temporal ens diu que $x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad ROC = R_x$ (Excepte el 0 i l'infinit que poden entrar o sortir de la regió de convergència).

La propietat de desplaçament temporal és idèntica a la propietat de la T.F.S.D. fent la substitució $z = e^{j\omega}$. Respecte del R.O.C. de la transformada veiem que es manté igual excepte en el cas de dos valors particulars, el zero i l'infinit. Aquests valors estaran o no inclosos en la regió de convergència en funció d'on comenci i on acabi la seqüència en estudi però la resta de valors del R.O.C. romandrà invariant.

- [Oppenheim1999] p120 (apartat 3.4.2.)

4.4.3. Multiplicació per una seqüència exponencial

Aquesta propietat ens mostrarà com es modifica la transformada Z d'una seqüència quan la multipliquem per una exponencial complexa. Aquesta propietat és similar a la que vàrem estudiar en el domini de la T.F.S.D. però es més genèrica, atès que la



transformada Z estudia tot el pla complex mentre que la T.F.S.D. només ho fa en el cercle unitat.

Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $ROC = R_x$ la propietat de multiplicació per una exponencial ens diu que

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC = |z_0| R_x$$

Cal remarcar que si $z_0 = e^{j\omega_0}$ la propietat és exactament igual a la propietat de modulació de la T.F.S.D. i en aquest cas el R.O.C. no es veuria modificat. En qualsevol cas, l'estudi en aquest domini és molt més genèric, si $|z_0| > 1$ estem multiplicant per una exponencial creixent per n positius i decreixent per valors d'n negatius. En el cas de seqüències orientades a dreta provocaria una reducció de la seva regió de convergència (Recordem que en aquest cas és l'exterior d'una circumferència) però en el cas de seqüències orientades a esquerra provocaria un augment de la seva regió de convergència (En aquest cas és l'interior d'un cercle).

- [Oppenheim1999] p121 (apartat 3.4.3.)

4.4.4. Diferenciació de X(z)

La propietat de diferenciació és aplicable en el domini transformat donada la naturalesa contínua de la transformada en funció de la variable z. Aquesta propietat és molt interessant com veurem a continuació per al càlcul de transformades d'un determinat tipus de seqüències que serien de difícil càlcul per la via directa.

Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $ROC = R_x$ la propietat de derivació de X(z) ens diu que

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R_x$$

Tal i com s'observa en la propietat, el fet de multiplicar la seqüència x[n] per una rampa té una transformada tal i com veiem a l'expressió. Si apliquéssim aquesta propietat varies vegades podríem obtenir les transformades associades a la multiplicació per una paràbola o qualsevol seqüència del tipus n^k en general, essent k un valor sencer.

Cal recordar que per les característiques del sumatori de la transformada Z, només ens serà fàcil calcular aquelles transformades que admetin una expressió com a suma de sèries geomètriques. Aquesta propietat és de gran ajuda per al càlcul de transformades amb termes lineals o similars.

- [Oppenheim1999] p122 (apartat 3.4.4.)



4.4.5. Conjugació d'una seqüència complexa

Aquesta propietat fa referència a les modificacions de la transformada si es conjuga la seqüència complexa d'entrada $x[n]$.

Si $x[n] \xrightarrow{z} X(z)$ $ROC = R_x$ la propietat de derivació de $X(z)$ ens diu que

$$x^*[n] \xrightarrow{z} X^*(z^*) \quad ROC = R_x$$

Es pot observar que existeixen modificacions al domini transformat però que la regió de convergència no varia. Això podem veure que és molt natural ja que la conjugació de la seqüència no implica cap canvi en l'energia de la mateixa i atès que la convergència de la transformada només depèn del mòdul de la seqüència aquesta no es veurà modificada.

- [Oppenheim1999] p123 (apartat 3.4.5.)

4.4.6. Reflexió temporal

En aquest apartat veurem els canvis en el domini transformat quan fem una reflexió del senyal sobre l'eix temporal.

Si $x[n] \xrightarrow{z} X(z)$ $ROC = R_x$ la propietat de reflexió temporal d' $X(z)$ ens diu que

$$x[-n] \xrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ROC = \frac{1}{R_x}$$

Quan es fa una reflexió sobre l'eix temporal la regió de convergència sofreix canvis importants ja que les seqüències orientades a dreta passen a ser seqüències orientades a esquerra i a l'inrevés.

La interpretació de la regió de convergència s'ha de fer de la següent forma. Si $x[n]$ és una seqüència orientada a dreta amb una regió de convergència com l'exterior d'un cercle de radi z_0 , $x[-n]$ serà orientada a esquerra amb una regió de convergència definida en l'interior d'un cercle de radi $\frac{1}{z_0}$. Atès que la regió de convergència sempre està delimitada per pals, el que hem de fer per trobar la nova regió de convergència és invertir tots i cadascun dels pals i si abans eren l'exterior d'un cercle ara serà l'interior d'un altre cercle i trobarem la regió de convergència com la intersecció de les noves regions aplicant la propietat anterior.

- [Oppenheim1999] p123 (apartat 3.4.6.)



4.4.7. Convolució de seqüències

Una de les propietats més importants en l'estudi de senyals i sistemes discrets és la convolució i conseqüentment, tota transformada que simplifiqui l'estudi necessàriament haurà de tenir definida la propietat de convolució.

Considerant dos seqüències tal i com es defineix en la següent expressió

$$\begin{aligned}x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC = R_{x_1} \\x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC = R_{x_2}\end{aligned}$$

la propietat de convolució de la transformada ens diu que

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad ROC = R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Atès que la convolució és un operador lineal, les propietats de convergència de la transformada són les mateixes que en el cas de la propietat de linealitat. El gran avantatge de la propietat de convolució és que en el domini transformat passem a treballar amb productes i es simplifica enormement tant la fase d'estudi com el disseny de sistemes discrets. És important veure la demostració d'aquesta propietat.

- [Oppenheim1999] p123 (apartat 3.4.6.)

4.4.8. Teorema del valor inicial

Una propietat senzilla i interessant és el teorema del valor inicial. Aquesta propietat només és aplicable en el cas de senyals causals i ens diu que

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Si bé aquesta propietat no es que tingui gaire utilitat en el càlcul de transformades, sí que pot servir com a eina senzilla de comprovació. Un cop hem calculat una transformada d'un senyal causal podem comprovar el teorema del valor inicial. Si aquest coincideix, no ens assegura que la transformada estigui bé, però el que sí podem assegurar és que si no coincideix hi haurà algun error en el procediment.

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat els conceptes més importants de les propietats de la transformada Z. Cal recordar que les propietats són eines extremadament útils que haurem de fer servir per simplificar el procediment de càlcul de transformades a ajudar-nos a la comprensió i el disseny de sistemes discrets. A més de la mera operatòria de càlcul és important que indaguem en els missatges implícits en les propietats ja que la seva comprensió aporta més al dissenyador de sistemes que la mateixa aplicació de la matemàtica.





SESSIÓ 19

- ❖ Nom: La transformada Z inversa
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En la sessió anterior s'han tractat els temes relacionats amb el càlcul de la transformada Z i la seva aplicació a l'estudi de senyals i sistemes. Hem analitzat les propietats relacionades amb el R.O.C. i les propietats que podem aplicar per al càlcul de transformades Z de senyals.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem les tècniques per poder realitzar el càlcul de la transformada Z inversa. Es pretén que assolim el grau de coneixement necessari per poder utilitzar completament la transformada Z en l'estudi de senyals i sistemes. Per completar aquest estudi ens queden per veure els diferents mètodes per trobar transformades inverses que completarem en aquesta sessió.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem diferents mètodes per a calcular la transformada Z inversa. Veurem el mètode d'inspecció i ens centrarem en el mètode d'expansió en fraccions simples, molt útil per a antitransformar les expressions que descriuen els sistemes discrets lineals i invariants implementats amb equacions en diferències i coeficients constants: els filtres discrets.

4.5. Introducció a la transformada Z inversa

Existeixen diferents mètodes per al càlcul de la transformada Z inversa. Un dels mètodes és el mètode formal basat en el teorema integral de Cauchy però en general, amb el tipus d'expressions i senyals que usualment apareixen en l'estudi de senyals i sistemes discrets existeixen mètodes menys formals i més senzills que són preferibles per realitzar aquest tipus d'estudi. Cal recordar que la transformada Z és una transformada definida sobre el pla complex i amb una regió de convergència associada. El mètode formal consisteix en una integral de contorn definida dintre d'aquest pla que complica notablement el càlcul si la comparem amb d'altres mètodes més senzills que veurem a continuació



4.5.1. El mètode d'inspecció

El mètode d'inspecció és el mètode més senzill de tots i consisteix simplement a familiaritzar-nos amb certes seqüències, les seves transformades associades i les seves regions de convergència per determinar quina és la transformada inversa associada a una certa expressió.

Una de les transformades Z més conegudes és l'associada al senyal següent:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

El mètode d'inspecció consisteix a identificar una expressió en el domini transformat Z i associar-la a la seqüència temporal simplement per inspecció directa.

Existeixen taules en què els senyals estan tabulats juntament amb les seves transformades i les regions de convergència associades.

4.5.2. Expansió en fraccions simples

Hem vist que pel mètode d'inspecció podem obtenir directament transformades Z inverses d'un conjunt determinat de senyals. No obstant això, les expressions a què ens haurem d'enfrontar per al càlcul de la seva transformada inversa no sempre apareixeran en aquestes taules tabulades. El mètode d'expansió en fraccions simples descompon l'expressió original en la suma d'un conjunt d'expressions simples que permet el càlcul de la transformada inversa de cadascun dels termes pel mètode d'inspecció directa.

En general, les expressions en què haurem de treballar en el camp del processament de senyal són expressions en el domini transformat que es poden expressar com a quocient de polinomis:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Cas amb $M < N$ i pals simples

En aquest cas l'expressió anterior es podria descompondre segons la següent forma:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}$$

Com es pot observar a l'expressió, els pals simples de la descomposició coincideixen amb els pals de l'expressió original. Un cop determinat el valor dels residus



A_k cadascun dels termes de l'expressió es poden antitransformar fent ús del mètode d'inspecció.

El càlcul dels residus associats a cada fracció simple es pot realitzar amb tractament algebraic convencional, però en el cas que el nombre sigui elevat ens trobem que seria necessari una gran quantitat de càlcul. Existeix un mètode més ràpid de càlcul dels residus que consisteix a trobar cada coeficient de la següent forma:

$$A_k = \left(1 - d_k z^{-1}\right) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

- [Oppenheim1999] p112-p113

Cas de $M > N$ i pals simples

En el cas que l'ordre del numerador sigui superior al del denominador no podem dur a terme de forma directa i cal fer una divisió prèvia fins reduir l'ordre del numerador per sota de l'ordre del denominador. Feta aquesta divisió prèvia podem arribar a descompondre l'expressió $X(z)$ segons:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}$$

on els coeficients B_r són els coeficients de la divisió polinòmica prèvia i la resta la descomposició en fraccions simples de la resta de la divisió.

- [Oppenheim1999] p112-p113

Cas $M > N$ i pals múltiples

El cas més complex que ens podem trobar és aquell en què existeixen pals múltiples i a més el numerador té un ordre superior al del denominador. En aquest cas cal fer una divisió polinòmica prèvia per reduir l'ordre del numerador i finalment fer l'expansió en fraccions simples del numerador reduït (resta de la divisió) entre denominador. Aquest procediment algebraic ens portarà a una expressió del tipus:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})} + \sum_{k=i}^S \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

En aquest cas, per a major claredat, es considera que existeix un únic pal múltiple amb multiplicitat S que correspon al tercer terme de la suma en l'expressió anterior. El procediment de càlcul dels paràmetres B_r i A_k és similar al de l'apartat anterior. El càlcul dels paràmetres C_m es realitza segons aquesta equació:



$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left[(1-d_i w)^s X(w^{-1}) \right] \right\}_{w=d_i^{-1}}$$

Aquesta equació serà vàlida per a qualsevol multiplicitat i tot la complexitat aparent de la mateixa queda sensiblement simplificada en el cas que la multiplicitat sigui 2. Cas que tinguéssim més pals múltiples el desenvolupament del termes associats als pals múltiples seria exactament igual a l'expressió presentada anteriorment.

- [Oppenheim1999] p112-p115

4.5.3. Expansió en sèrie de potències

Aquest mètode de càlcul de la transformada Z inversa surt del fet que l'expressió de la transformada Z té la forma d'una sèrie de Laurent on els valors $x[n]$ són els coeficients de z^{-n} . Aquest mètode no és gaire utilitzat però pot ser d'utilitat en el càlcul d'alguna transformada en concret.

- [Oppenheim1999] p116-p118

4.5.3.1. Problema 1 de Transformada Z inversa

Determineu la seqüència associada a la següent transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

- [Oppenheim1999] p113

4.5.3. 2. Problema 2 de Transformada Z inversa

Determineu la transformada Z inversa de la següent expressió:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- [Oppenheim1999] p113

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les diferents tècniques per calcular la transformada Z inversa. Ens hem centrat en l'estudi dels mètodes més senzills de càlcul de la transformada Z inversa aplicables a expressions racionals de polinomis. Aquests mètodes ens proporcionen solucions per a la majoria de senyals implicats en l'estudi de senyals i sistemes discrets, i per tant, disposem d'un conjunt d'eines útils per poder afrontar els problemes amb garanties.





SESSIÓ 20

- ❖ Nom: Estudi de sistemes lineals amb la transformada Z
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A la sessió anterior vàrem estudiar diferents mètodes per a realitzar la inversió de la transformada Z.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem la caracterització dels sistemes lineals i invariants discrets mitjançant aquesta nova eina d'anàlisi que és la transformada Z.

4.6. Estudi de sistemes caracteritzats per equacions lineals de coeficients constants

Tal i com podem deduir de les propietats de la transformada de Fourier, la resposta d'un filtre ideal (ex: filtre passabaix amb transició abrupta i bandes de pas i atenuades constants) és una seqüència de durada infinita i no causal. La implementació de filtres amb un cost computacional finit la podem aconseguir fent ús de les equacions lineals amb coeficients constants. Amb aquestes equacions i dissenyant els coeficients de forma adequada podem aconseguir realitzar aproximacions al filtre ideal amb un cost computacional reduït.

L'estudi de la transformada Z i la seva relació amb les equacions en diferències ens servirà de marc per poder analitzar el comportament de sistemes discrets i relacionar-ho amb la T.F.S.D.

Si recordem l'expressió d'una equació en diferències amb coeficients constants tenim la següent equació:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

En principi i si no s'indica el contrari assumirem que el sistema és causal, conseqüentment, la solució d'aquesta equació en diferències serà una seqüència



orientada a la dreta. Aplicant propietats de desplaçament temporal i transformant ambdues parts de l'expressió arribem a la següent conclusió:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

i treballant sobre l'expressió anterior podem arribar a la següent equació per determinar la funció de transferència del sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Aquesta expressió ens permet fer una descripció de la posició dels pals i zeros del sistema i ens permetrà inferir el comportament del sistema en funció de la seva distribució de pals i zeros en el domini transformat.

Resposta impulsional del sistema

Donada l'expressió de la funció de transferència $H(z)$, la resposta impulsional del sistema la podem determinar aplicant les tècniques de transformada Z inversa descrites a la sessió anterior. Tota equació en diferències té una expressió en el domini transformat com a quocient de polinomis i les tècniques vistes en la sessió anterior poden ser aplicades en tots aquests casos (ens referim a les tècniques d'expansió en fraccions simples combinada amb el mètode d'inspecció directe).

- [Oppenheim1999] p250-p252

Estabilitat del sistema

En el tema de la T.F.S.D. vàrem estudiar l'estabilitat dels sistemes lineals i invariants en el temps i la conclusió va ser que un sistema és estable si la seva resposta impulsional és absolutament sumable, és a dir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Si intentem expressar aquesta condició en funció de la transformada Z podem arribar a la següent conclusió:



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-1}| \Big|_{z=1} < \infty$$

Aquesta condició és equivalent a dir que un sistema serà estable si la regió de convergència del sistema engloba el cercle unitat, o dit d'una altra forma, un sistema serà estable si existeix la seva T.F.S.D.

En sistemes causals (seqüències orientades a dreta), la condició d'estabilitat implica que tots els pals estiguin dintre del cercle unitat, ja que el R.O.C. és l'exterior del pal de mòdul màxim.

- [Oppenheim1999] p247

4.6.1. Resposta freqüencial de sistemes amb funcions de transferència racionals

En l'estudi de senyals i sistemes discrets és de vital importància obtenir la representació freqüencial del sistema. La transformada Z és una transformada més genèrica que simplifica l'etapa d'anàlisi i disseny del sistema donada la seva expressió com a funcions racionals, però al final un dels objectius més importants de l'estudi és arribar a trobar la funció de transferència freqüencial del sistema sota anàlisi.

Influència dels pals i zeros a la resposta freqüencial

L'expressió de la transformada Z en funció dels zeros i pals del sistema ens porta a conclusions interessants sobre el tipus de sistema en funció del mapa de pals i zeros que aquest tingui.

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = |H(z)| = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|} = \frac{b_0}{a_0} \left| e^{j\omega(N-M)} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |e^{-j\omega} - c_k|}{\prod_{k=1}^N |e^{-j\omega} - d_k|}$$

Aquesta representació de la T.F.S.D. ens permet interpretar el guany del sistema com el producte de la distància als zeros des del punt freqüencial sota anàlisi $e^{j\omega}$ dividit entre la distància als pals. Aquesta conclusió ens porta que els sistemes tindran guanys petits al voltant d'aquelles freqüències que es trobin a la zona d'influència dels zeros i guanys elevats a aquelles freqüències que es trobin a la zona d'influència dels pals. Aplicant aquests coneixements podem arribar a donar una descripció intuïtiva del comportament freqüencial d'un sistema simplement analitzant el seu mapa de pals i zeros.



A partir d'aquesta expressió també es poden treure anàlisis de com es comporta la fase en funció dels pals i zeros i com aquests actuen sobre el retard de grup. Totes aquestes característiques les teniu desenvolupades a

- [Oppenheim1999] p253-p257

4.6.2. Problemes de transformada Z de sistemes lineals

A continuació se us proposen dos problemes sobre l'estudi dels sistemes lineals i invariants amb la transformada Z.

Problema 1

Realitzeu l'estudi d'un sistema lineal que tingui un pal simple i l'estudi d'un sistema lineal que tingui un zero simple. Trobeu la resposta freqüencial i la fase del sistema.

- [Oppenheim1999] p258-p265

Problema 2

Considereu el següent sistema lineal

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1})}$$

Realitzeu l'estudi de la seva resposta impulsional i calculeu la resposta freqüencial en guany i fase del sistema aplicant els conceptes desenvolupats en aquesta sessió.

- [Oppenheim1999] p265-p267

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat conceptes associats a les característiques del sistema en funció de la distribució de pals i zeros dintre del pla complex. L'estudi ens ha portat a la conclusió que en funció del diagrama de pals i zeros podem obtenir una idea aproximada al comportament freqüencial del sistema. D'altra banda, també podem fer el plantejament contrari, donat un sistema que tingui un guany desitjat podem intentar situar els pals i zeros per aproximar-nos a aquesta resposta, essent tots aquests conceptes interessants d'aplicar també en fases de disseny.



SESSIÓ 21

- ❖ Nom: Problemes transformada Z
- ❖ Tipus: de problemes
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [ProblemesTDSI2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A la sessió anterior vàrem estudiar les característiques la transformada Z dels S.L.I.T.s discrets.

OBJECTIUS

En aquesta sessió se us proposen alguns problemes de la transformada Z.

CONTINGUTS

En aquesta sessió proposarem alguns problemes de càlcul de la transformada Z així com de la transformada Z inversa.

4.6.3. Problema de càlcul de transformada Z

A continuació se us proposen problemes sobre el càlcul de la transformada Z.

Problema 1

Donats els següents senyals temporals determineu les seves transformades Z així com les regions de convergència associades:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

d) $\delta[n]$



- e) $\delta[n-1]$
- f) $\delta[n+1]$
- g) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$

▪ [Oppenheim1999] p832 (prob. 3.1)

Problema 2

Determineu la transformada Z inversa de les següents expressions:

- a) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$
- b) $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{2}$
- c) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$
- d) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$
- e) $X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} \quad |z| > \left|\frac{1}{a}\right|$

▪ [Oppenheim1999] p833 (prob. 3.6)

4.6.4. Problema de S.L.I.T. i transformada Z

Un S.L.I.T. té una resposta impulsional amb transformada Z definida segons

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- a) Determineu la regió de convergència del sistema H(z).
- b) Es tracta d'un sistema estable? Raoneu la resposta.
- c) Trobeu la transformada Z del senyal d'entrada X(z) que produiria a la sortida del sistema el senyal

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

▪ [Oppenheim1999] p833 (prob. 3.9)



SESSIÓ 22

- ❖ Nom: Introducció al disseny de filtres digitals
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

A les anteriors sessions hem estudiat l'eina bàsica per a entendre i poder afrontar el disseny i implementació dels sistemes discrets lineals i invariants: la transformada Z.

OBJECTIUS

En aquesta sessió començarem l'estudi de tècniques de disseny de filtres digitals. Ens centrarem en alguns conceptes importants i en la primera de les tècniques anomenada *mètode de les finestres*.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem el *mètode de les finestres*. Es tracta d'una eina molt útil per al disseny de filtres F.I.R. (o de resposta impulsional finita). No serveix, però, per a dissenyar filtres I.I.R. (o de resposta impulsional infinita, o filtres amb realimentacions), ja que es basa en el truncament en el temps de la resposta impulsional del filtre que compleix les especificacions ideals desitjades.

5. Disseny de filtres digitals

5.1. Introducció al disseny de filtres digitals

Els filtres digitals agrupen un gran conjunt dels sistemes lineals i invariants. De fet qualsevol sistema discret lineal i invariant es pot entendre com un sistema que es comporta com un *factor de guany o atenuació* depenent de la freqüència. Des d'aquest punt de vista, qualsevol S.L.I.T. és un filtre. No obstant això, sovint l'ús de filtres digitals es fa pensant en la cancel·lació, atenuació o bé amplificació de les components dins d'unes certes bandes freqüencials. Per aquest motiu, és molt freqüent utilitzar *plantilles* com a eina d'especificació on el filtre ha de deixar passar energia (bandes de pas) o bé rebutjar-la (bandes atenuades).



Fases en la implementació d'un filtre discret

La implementació d'un filtre discret comporta, en general tres fases:

1. Especificació de les propietats de comportament desitjades del filtre.
2. Aproximació per tal de maximitzar la semblança entre les especificacions desitjades i les que realment es poden arribar a assolir amb una estructura causal i amb un nombre finit d'operacions aritmètiques.
3. Realització del sistema.

En aquest capítol parlarem sobretot del pas 2, que és el que realment ens permet d'assolir en major o menor grau els objectius del disseny. El punt 1 depèn bàsicament del problema o escenari concret, mentre que el pas 3, és condicionant del programari disponible (quantitat de memòria disponible, nombre d'operacions per segon realitzables, etc..) i conseqüentment és també funció de l'entorn de l'aplicació concreta.

Traducció de les especificacions analògiques al domini discret

En la realització pràctica, el filtre digital acaba sovint implementant-se dins d'una cadena de processament de senyal analògic, de forma que amb els conversors A/D i D/A es conformen les interfícies entre el món analògic i el món discret. Per tant, passa sovint que les especificacions del pas 1 es donen en el món analògic, i cal traduir-les al món discret. Per fer-ho cal recordar la relació entre les funcions de transferència del sistema discret i del sistema analògic equivalent (veure l'apartat 2.4.1):

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

on T és el període de mostratge dels conversors, Ω és la pulsació analògica en rad/seg.

A partir de l'anterior relació, es poden "traduir" les especificacions en el domini analògic al domini discret dins del període bàsic de la T.F.S.D. segons:

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$

5.2. Disseny de filtres F.I.R. amb el mètode de les finestres

El *mètode de les finestres* és el mètode més senzill i intuïtiu per a dissenyar filtres F.I.R. En primer lloc es defineix la resposta freqüencial desitjada $H_d(e^{j\omega})$, la qual cal



especificar dins d'un període, per exemple $-\pi < \omega \leq \pi$. Una vegada es disposa de les especificacions del filtre ja es pot procedir a realitzar-ne el disseny.

Càlcul de la resposta impulsional ideal

A partir de les especificacions donades en el domini freqüencial, es pot realitzar el càlcul de la resposta impulsional amb la fórmula de la T.F.S.D. inversa:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

A la pràctica, seguint la filosofia de plantilles de filtres ideals (polsos rectangulars en el domini freqüencial), l'equació anterior es traduirà a tot un conjunt de *sincs* en el domini del temps. Cal dir que, en general, quan es fa un processament de senyals reals, la funció de transferència compleix la propietat d'hermeticitat, amb què hi ha una simetria complexa conjugada de les freqüències negatives amb les positives.

Enfinestrament de la resposta impulsional

La forma més senzilla d'obtenir un filtre F.I.R. d' $M+1$ coeficients i causal a partir de la resposta impulsional calculada és:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

De forma més genèrica, el mètode de les finestres es basa a fer el producte de la resposta original per una *finestra*, que no és més que un senyal finit definit dins l'interval de 0 a M , és a dir:

$$h[n] = h_d[n] w[n]$$

Per al cas més senzill, és una *finestra rectangular* definida com:

$$w[n] = u[n] - u[n - M - 1]$$

Efectes de l'enfinestrament en el domini freqüencial

El fet d'enfinestrar, és a dir, multiplicar la resposta impulsional desitjada per la finestra, provoca l'efecte de convolució en el domini freqüencial (propietat de la T.F.S.D.). Recordem aquesta propietat en aquest cas:

$$H(e^{j\omega}) = \text{T.F.S.D.}\{h_d[n] w[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



que no és més que la convolució periòdica entre les T.F.S.D.s respectives de la *plantilla* i de la finestra.

És clar que el resultat del disseny quedarà totalment influenciat per les característiques de la finestra. Idealment, una finestra infinita i igual a 1 donaria una T.F.S.D. del tipus delta de Dirac, obtenint la resposta freqüencial desitjada. No obstant això, les finestres es caracteritzen per ser senyals finits, el que fa que la seva transformada tingui components energètiques a altres freqüències diferents de la component contínua. Com més concentrada tingui la seva energia al voltant de zero, aleshores més semblant serà el resultat $H(e^{j\omega})$ a la resposta desitjada.

En el cas de la *finestra rectangular* la seva T.F.S.D. és justament una sinc periòdica:

$$W_R(e^{j\omega}) = T.F.S.D.\{u[n] - u[n - M - 1]\} = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

A la figura 7.20 de la pàgina 468 de [Oppenheim1999] podeu veure el dibuix del mòdul per al cas $M = 7$. La forma de les finestres en el domini freqüencial és força similar. En general sempre hi ha un *lòbul principal* i uns *lòbuls secundaris*. Per tenir uns bons resultats en el disseny, cal que el lòbul principal sigui el més estret possible i que concentri el màxim d'energia de tot el senyal. Per això es comparen, en general, dos factors importants:

- 1.-Relació principal a secundari: és la diferència en dBs entre els pics del lòbul principal $(20 \log_{10} |H(e^{j0})|)$ i del lòbul secundari (el segon més elevat)
- 2.-Amplada del lòbul principal: paràmetre relacionat amb la *resolució* assolida en el disseny, referent sobretot a les transicions sobtades, com és el cas de la transició entre les bandes de pas i les bandes atenuades.

En general, es requereix un valor de relació principal a secundari (o també anomenat degoteig espectral (*leakage*)) el major possible, i d'un ample de lòbul principal el més petit possible.

Les dues principals característiques en el domini freqüencial de la finestra utilitzada produeixen bàsicament dos efectes que degraden la idealitat de la resposta freqüencial obtinguda si és comparada amb la *plantilla* original:

- 1.-Una aparició d'un arriestat a les bandes de pas i de rebuig
- 2.-Un engruiximent de les transicions entre les bandes de pas i de rebuig, el que fa que apareguin les *bandes de transició*.

Com a exemple gràfic vegeu la figura 7.19 de la pàgina 467 de [Oppenheim1999]

Finestres més usals

A continuació es mostren les expressions temporals de les finestres més usals:

Finestra Rectangular:



$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Finestra Bartlett (triangular):

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Finestra Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Finestra Hamming:

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Finestra Blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n / M) + 0.08 \cos(4\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Vegeu les formes d'ona temporals a la *figura 7.21 de la pàgina 469*, i les formes de la magnitud de l'espectre a la *figura 7.22 de la pàgina 470 de [Oppenheim1999]*. Com es pot veure, la finestra rectangular és la més resolutiva, però en canvi és la que té una pitjor relació entre principal i secundari. En contraposició, la Blackman és la que té una pitjor resolució, però es canvi una millor relació de degoteig espectral.

Generalment, a l'hora de realitzar el disseny d'un filtre F.I.R. amb aquest mètode cal comprovar el resultat de la resposta freqüencial utilitzant diferents finestres, de forma que el dissenyador comprova quin dels resultats és el més adequat per a l'aplicació en concret.

- [Oppenheim1999]p465-p472

RESUM

En aquesta sessió hem introduït el disseny de filtres F.I.R. amb el mètode de les finestres, que proporciona una eina senzilla i intuïtiva per realitzar dissenys ràpids tot i que de vegades poc precisos.





SESSIÓ 23

- ❖ Nom: Disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser
- ❖ Tipus: teoricopràctica
- ❖ Format: semi presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]
 - Recursos de programari i de maquinari
 - MATLAB (Laboratoris)

PRECEDENTS

En l'anterior sessió vàrem estudiar el disseny de filtres F.I.R. amb el *mètode de les finestres*.

OBJECTIUS

En aquesta sessió es veurà una variant del mètode de les finestres utilitzant la finestra *Kaiser*, la qual té un paràmetre que permet ajustar-ne les característiques més adients per assolir les especificacions d'un determinat disseny. S'acabarà la sessió amb un conjunt d'exercicis per comprovar en el laboratori amb el MATLAB i amb una petita autoavaluació sobre la part de *disseny de filtres F.I.R. amb el mètode de les finestres*.

CONTINGUTS

Es definirà la *finestra Kaiser* i es veurà com ajustar els seus paràmetres per assolir unes determinades especificacions.

5.3. Mètode de disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser

A l'apartat 5.2.1. vàrem estudiar el *mètode de les finestres* com a eina de disseny de filtres F.I.R.. Vàrem veure la importància de l'elecció de la *finestra*. Concretament, vàrem estudiar dues característiques importants a l'hora d'escollir una o altra *finestra*: la relació principal a secundari (degoteig espectral (*leakage*)), i l'amplada del lòbul principal (o també resolució). Es varen estudiar tot un conjunt de finestres amb diferents compromisos de degoteig-resolució, veient que quan la relació principal a secundari era elevada la resolució era baixa i viceversa. En certes aplicacions resulta convenient ajustar bé aquestes característiques ja que influencien el resultat de la resposta freqüencial del disseny. Per aquest motiu, Kaiser va estudiar l'ús d'una nova finestra que té la característica diferencial respecte de les ja vistes fins ara que a més de dependre del paràmetre M (durada) també depèn d'un paràmetre que permet ajustar de forma adequada la relació entre ambdues característiques fonamentals.



La finestra Kaiser

La finestra Kaiser es defineix a partir de la funció de Bessel modificada de primer ordre $I_0(x)$ i els paràmetres de disseny M i β :

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left[\beta\left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

on $\alpha = M/2$ és el retard de grup del filtre. En el cas que es vulgui obtenir un filtre de fase lineal, el terme de fase del filtre serà $e^{-j\omega M/2}$.

Vegeu la figura 7.24 de la pàgina 475 de [Oppenheim1999], on es mostra la forma temporal de la finestra per a diferents valors de β i $M = 20$. Observeu que per $M = 0$ s'obté la *finestra rectangular* (major resolució, pitjor relació principal a secundari). També es mostra la resposta freqüencial de la finestra tant variant β i mantenint el mateix valor de M com fixant β i variant M . En el primer cas observeu com varien totes dues característiques: a mesura que augmenta el valor de β empitjora la resolució però millora el degoteig espectral. Per al segon cas, en canvi, un augment de la durada de la finestra només provoca una millora de la resolució, sense modificar la relació principal a secundari.

Elecció dels paràmetres M i Beta per a un determinat disseny

Kaiser va estudiar com escollir el valor òptim dels paràmetres de disseny M i β per tal d'assolir una determinada qualitat en el disseny final. La noció de qualitat assolida es descriu segons els efectes que la finestra produeix sobre la selectivitat final d'un filtre prototipus passabaix (vegeu figura 7.23 de la pàgina 473 de [Oppenheim1999]): l'arissat a les bandes atenuada i de pas δ , i l'amplada de la banda de transició $\Delta\omega$. Va veure que l'elecció del paràmetre β influenciava el valor de l'arissat δ , mentre que, una vegada escollit el valor de β es podia ajustar el gruix de la transició $\Delta\omega$ ajustant el valor de M , ja que aquest no influeix per a res en el degoteig espectral. Les expressions de disseny en què va concloure el seu estudi, basat en una extensa cerca numèrica, són les següents:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0 & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega}$$

on:



$A = -20 \log_{10} \delta$, $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, i ω_p és el valor de pulsació més gran de la banda de pas on $|H(e^{j\omega})| \geq 1 - \delta$ i ω_s és el valor de pulsació més petit de la de rebuig on $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$.

El valor d'M s'ha d'aproximar sempre al valor enter més proper al valor donat per l'expressió de disseny anterior.

La freqüència de tall del filtre, gràcies a la simetria de la discontinuïtat en la banda de transició, es pot aproximar per la freqüència intermèdia entre ω_p i ω_s , és a dir:

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

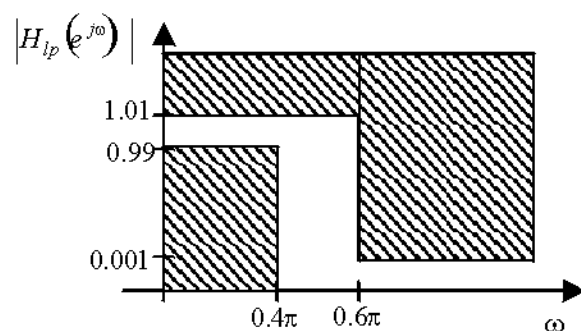
- [Oppenheim1999] p474-p478 (vegeu també les figures 7.24 i 7.25)

5.3.1. Problemes de disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser

A continuació se us proposen un parell de problemes de disseny de filtres F.I.R. amb la finestra Kaiser, per a realitzar amb el MATLAB.

Problema 1

Disseny un filtre passabaix F.I.R. de fase lineal amb el *mètode de la finestra Kaiser* que compleixi les següents especificacions en forma de plantilla:



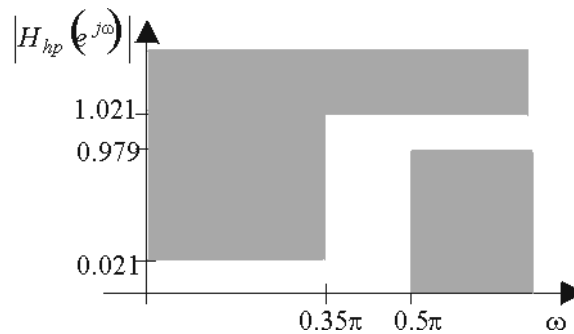
Fes el disseny i comprova la resposta freqüencial amb la funció *freqz* del MATLAB. Defineix la resposta impulsional del filtre amb l'ajuda de les funcions *kaiser* i *sinc*. Per qualsevol dubte sobre una funció determinada (paràmetres que requereix i que retorna la funció, etc.) executa la comanda `>>help <nom_funció> [Return]`. Una vegada creada la resposta impulsional al vector *h* visualitza-la amb la funció `>>stem(h)` i visualitza també la resposta freqüencial amb `>>freqz(h,1)`. Comprova que el disseny compleix les especificacions indicades per l'enunciat (tant la plantilla associada al mòdul com la linealitat de la fase). Dibuixa el retard de grup del filtre amb la funció `>>[G,w] = grpdelay(h,1); plot(w,G);`



- [Oppenheim1999] p476-p478 (vegeu també figura 7.25)

Problema 2

Disseny un filtre passaalt F.I.R. de fase lineal amb el *mètode de la finestra Kaiser* que compleixi les següents especificacions en forma de plantilla:



Tingues en compte que pots fer el disseny basant-te en un filtre passabaix amb resposta freqüencial $H_{lp}(e^{j\omega})$ tal com:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} (1 - H_{lp}(e^{j\omega}))$$

on $M/2$ és el retard de grup del filtre i, per tant, el terme de fase lineal de la funció de transferència.

Fes les mateixes verificacions amb el MATLAB que vas fer en l'anterior problema.

- [Oppenheim1999] p479-p481 (vegeu també figures 7.26 i 7.27)

Problema 3

Disseny un filtre que compleixi les següents condicions:

$$\begin{aligned} 0.98 < |H(e^{j\omega})| < 1.02 & \quad \text{per } 0 \leq |\omega| \leq 0.63\pi \\ |H(e^{j\omega})| < 0.15 & \quad \text{per } 0.65\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

Troba els valors òptims de β i M de la finestra Kaiser més adequada pel disseny. Comprova si el teu disseny satisfà les condicions amb el MATLAB.

RESUM

En aquesta sessió hem vist un nou mètode de disseny de filtres F.I.R. basat en l'enfinestrament de la resposta impulsional, però que permet ajustar millor les especificacions desitjades amb l'ús d'un nou paràmetre que modifica la forma tant temporal com freqüencial de la finestra. La finestra Kaiser és només un exemple que permet veure que la introducció de nous paràmetres de control permet optimitzar més el procés de disseny.





SESSIÓ 24

- ❖ Nom: Disseny de filtres I.I.R. a partir de filtres analògics (I)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]

PRECEDENTS

En les anteriors dues sessions vàrem estudiar el disseny de filtres F.I.R. a partir del mètode de les finestres.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem el disseny de filtres digitals tipus I.I.R. (amb resposta impulsional infinita) mitjançant l'aprofitament de tota la teoria desenvolupada al voltant del disseny de filtres amb components analògics.

CONTINGUTS

Aquesta sessió conté la teoria del disseny de filtres digitals de tipus I.I.R. a partir de tècniques ja desenvolupades per al disseny de filtres analògics. Concretament s'estudiaran les tècniques de la *invariància impulsional* i de la *transformació bilineal*, les quals permeten convertir dissenys fets en el domini analògic per convertir-los a dissenys en el domini discret.

5.4. Disseny de filtres I.I.R. a partir de filtres analògics

L'estat de la qüestió en el disseny de filtres de temps continu o analògics va ser predecessor i, conseqüentment força més desenvolupat, que el disseny de filtres de temps discret o digitals. Per aquest motiu, i pel fet que es disposava d'expressions tancades que permetien accedir directament a les solucions òptimes de disseny en el domini analògic (filtres de *Butterworth*, de *Txebyshev*, filtres *el·líptics*, filtres de *Bessel*), es van desenvolupar tot un conjunt de procediments per mapar els resultats dels dissenys analògics en el nou àmbit de treball en el domini discret.



Transformada de Laplace v.s. transformada Z

Recordem que el domini analògic es basa en el disseny en el pla $s = \sigma + j\Omega$ de la transformada de Laplace o funció de transferència $H_c(s)$, domini en el qual posicionem de forma convenient els pols i zeros del sistema analògic per assolir una determinada forma de la resposta freqüencial $H_c(j\Omega)$, la qual obtenim avaluant $H_c(s)$ a l'eix imaginari del pla s , $s = j\Omega$.

El mapatge o conversió d'un filtre analògic a un filtre discret es fa partint de la correspondència entre aquest lloc geomètric (eix imaginari del pla s) sobre el lloc geomètric del pla $z = re^{j\omega}$ on s'avalua la resposta freqüencial d'un sistema discret (el cercle unitari per $r = 1$).

Estabilitat

Recordem també, que l'estabilitat d'un filtre analògic causal i real és garantia sempre que els pols es trobin al semiplà esquerre d' s , on $\sigma < 0$. D'altra banda, la condició equivalent però en el domini dels filtres digitals és que els pols es trobin dins del cercle unitat (on $r < 1$). Per tant, això ens deixa una idea sobre com s'ha d'establir la relació per tal de fer la conversió d'un filtre analògic a un filtre discret.

Formes de convertir un filtre analògic en un filtre discret

Les tècniques de conversió d'un filtre analògic $h_c(t) \xrightarrow{T.L.} H_c(s)$ a un filtre discret $h[n] \xrightarrow{T.Z.} H(z)$ es basen a establir relacions o bé en el domini temporal $h[n] = T\{h_c(t)\}$ o bé en el domini freqüencial $H(z) = T\{H_c(s)\}$. En el segon cas, veurem que es tracta de realitzar un correspondència directa entre les variables complexes s i z , és a dir $z = T\{s\} \Rightarrow H(z) = H_c(s = T^{-1}\{z\})$. Estudiarem les dues tècniques més utilitzades, cadascuna de les quals es basa en un tipus de mapatge diferent:

- 1.- Mètode de la invariància impulsional: mapatge del tipus $h[n] = T\{h_c(t)\}$
- 2.- Mètode de la transformació bilineal: mapatge del tipus $H(z) = T\{H_c(s)\}$

▪ [Oppenheim1999] p439-p443

5.4.1. Disseny mitjançant la invariància impulsional (mostratge de la $h(t)$)

El mètode de la *invariància impulsional* es basa a definir $h[n]$ com un mostratge de la resposta impulsional del filtre analògic, és a dir:



$$h[n] = T_d h_c(nT_d)$$

on T_d és el període de mostratge utilitzat. Aquest paràmetre no té per què tenir res que veure amb el valor del període de mostratge T usat en el sistema de processament digital. En principi, el seu valor pot ser escollir independentment de les especificacions del filtre discret requerit.

Relació en el domini freqüencial i aliàsing

L'equació anterior expressa un mostratge ideal de la resposta impulsional del sistema analògic. Per tant, en el domini freqüencial la relació és la ja coneguda com:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)$$

Si $H_c(j\Omega)$ és de banda limitada a $|\Omega| < \pi/T_d$, aleshores el mostratge es produeix sense l'aparició de l'aliàsing, i per tant:

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right) \quad \text{per } |\omega| \leq \pi$$

En aquest cas es pot afirmar que la correspondència entre la freqüència analògica i la freqüència discreta és lineal segons $\omega = T_d\Omega$ per $|\omega| < \pi$ (vegeu la figura 7.3 de la pàgina 444 de [Oppenheim1999]). Aquesta relació ens ha de servir per transformar les especificacions del filtre discret a les especificacions del filtre analògic.

Es pot observar que només es pot menysprear l'efecte de l'aliàsing en el cas que el filtre a dissenyar sigui passabaix o passabanda, ja que en la resta de casos (passaalt, rebutjabanda) la banda del filtre serà infinita. Això restringeix l'ús d'aquesta tècnica de mapatge al disseny de filtres de banda limitada (passabaix i passabanda).

- [Oppenheim1999] p443-445

Correspondència entre $H(z)$ i $H_c(s)$

Per estudiar la correspondència entre les funcions de transferència dels sistemes analògic i discret, comencem per expressar $H_c(s)$ en la seva expansió en fraccions simples (simplifiquem l'estudi per a un filtre amb pols de multiplicitat 1):

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

La resposta impulsional d'aquest sistema és:



$$h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

Apliquem el mostratge a temps múltiples de T_d per obtenir la resposta impulsional del sistema discret:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k e^{s_k n T_d} u(nT_d) = \sum_{k=1}^N T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

La funció de transferència del filtre discret es pot calcular directament a partir de la transformada $a^n u[n] \xrightarrow{T.Z.} (1 - az^{-1})^{-1}$

$$H(z) = T.Z.\{h[n]\} = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

Com es pot observar, els pols s_k del domini analògic s'han transformat en pols $z_k = e^{s_k T_d}$ del domini discret, i ha aparegut un factor d'escala T_d en els coeficients de l'expansió en fraccions simples. Això ens garanteix que si el filtre analògic és estable, és a dir $\sigma_k < 0$, aleshores el filtre discret també ho serà, ja que $|z_k| = |e^{(\sigma_k + j\Omega_k)T_d}| = e^{\sigma_k T_d} < 1$ (tots els pols del filtre discret es troben dins del cercle unitat). La relació vista ara entre els pols d'ambdós dominis no es manté de la mateixa forma en el cas dels zeros, ja que normalment els zeros són funció dels pols i dels coeficients de l'expansió en fraccions simples.

- [Oppenheim1999] p445-446

5.4.2. Disseny mitjançant la transformació bilineal

La tècnica de la *transformació bilineal*, a diferència del mètode de la *invariància impulsional*, evita el problema de l'aliàsing, permetent generalitzar el mapatge del domini analògic al discret per a tot tipus de filtres incloent els prototipus passaalt i rebutjabanda. La idea original d'aquest mapatge va sorgir de plantejar l'equació en diferències d'un filtre discret com l'aproximació de l'equació diferencial d'un filtre analògic aplicant la tècnica d'integració numèrica amb funcions trapezoïdals d'amplada temporal T_d .

Mapatge

La transformació bilineal és una correspondència directa entre les variables complexes s i z :

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$



per tant es pot escriure la relació entre funcions de transferència:

$$H(z) = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right]$$

Estudiem el mapatge substituint $s = \sigma + j\Omega$ i aïllant z de la primera equació:

$$z = \frac{1 + \sigma T_d / 2 + j\Omega T_d / 2}{1 - \sigma T_d / 2 - j\Omega T_d / 2}$$

Conseqüències i relació entre freqüències

D'aquesta relació es pot concloure que si $\sigma < 0$ aleshores $|z| < 1$ per a qualsevol valor de Ω , mentre que $|z| > 1$ si $\sigma > 0$. És a dir, que el semiplà esquerre del pla s (zona d'estabilitat del domini analògic) queda mapada dins del cercle unitat del pla z (zona d'estabilitat del domini discret, vegeu la figura 7.6 de la pàgina 452 de [Oppenheim1999]). Per estudiar la relació entre les freqüències analògica Ω i discreta ω substituïm $\sigma = 0$ a l'anterior equació obtenint un nombre complex de mòdul 1 i fase igual a la freqüència discreta:

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega T_d / 2}{1 - j\Omega T_d / 2}$$

d'on aïllant el valor de Ω s'arriba a:

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad \text{o equivalentment} \quad \omega = 2 \operatorname{arctg}(\Omega T_d / 2)$$

Com es pot observar, a diferència de la tècnica de la *invariància impulsional* el mapatge de freqüències és no lineal, cosa que possibilita la compressió de tot l'eix de freqüències analògiques $-\infty < \Omega < +\infty$ en l'interval finit de freqüències discretes $-\pi < \omega \leq +\pi$ (vegeu la figura 7.7 de la pàgina 452 de [Oppenheim1999]). Això fa que ja no hi hagi el problema de l'aliàsing en aquest cas. D'altra banda el preu que paguem per aquest fet és la no linealitat de la relació entre ambdues variables freqüencials. Particularment, si el filtre analògic té fase lineal és evident que la fase del filtre digital deixarà de ser-ho degut a la relació entre ambdues freqüències, per tant *la linealitat de la fase no es manté invariant en la transformació* cosa que sí succeïa en el *mètode de la invariància impulsional*.

Traducció de les especificacions

Si es volen assolir unes determinades especificacions del filtre discret (p.ex: freqüències límit de les bandes de pas i atenuada ω_p i ω_s) cal traduir primer de tot aquestes especificacions al domini analògic mitjançant la relació de l'equació anterior, de forma que una vegada fet el disseny analògic i convertit a digital amb la

transformació bilineal, el filtre discret complirà perfectament les especificacions originals.

- *[Oppenheim1999] p450-454*

RESUM

En aquesta sessió hem vist que és possible dissenyar filtres I.I.R. discrets a partir de filtres analògics mitjançant l'ús d'unes transformacions. Concretament hem estudiat les tècniques de la invariància impulsional i de la transformació bilineal. A la següent sessió recordarem algunes de les tècniques de disseny de filtres analògics.



SESSIÓ 25

- ❖ Nom: Disseny de filtres I.I.R. a partir de filtres analògics (II).
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 4 hores
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Oppenheim1999]
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Proakis1992]
 - Recursos de programari i de maquinari
 - MATLAB (Laboratoris)

PRECEDENTS

En l'anterior sessió vàrem explicar dues tècniques per tal d'aprofitar dissenys de filtres analògics per ser utilitzats en la confecció de filtres digitals de tipus I.I.R.

OBJECTIUS

En aquesta sessió es farà un repàs dels filtres analògics més utilitzats a l'hora de fer dissenys de filtres discrets I.I.R. Veurem els filtres de Butterworth (més simples) i els filtres de Chebyshev tipus I (més òptims, a costa de tenir un arrissat a la banda de pas).

CONTINGUTS

En aquesta sessió repassarem les principals característiques dels filtres de Butterworth i de Chebyshev Tipus I, així com les expressions de disseny basades en les especificacions d'una plantilla. Aquest complement teòric ens permetrà lligar el contingut de la sessió anterior per tal de poder confeccionar un filtre digital a partir del disseny d'un filtre analògic i una transformació del domini analògic al domini discret.

5.5. Filtres analògics més usats per al disseny de filtres digitals

A continuació recordarem el disseny de filtres analògics més importants: els *filtres de Butterworth* i els *filtres de Chebyshev*. Ens centrarem en els filtres de tipus passabaix, ja que, com veurem més endavant, posteriorment es poden *aplicar tècniques de transformacions freqüencials* per tal de convertir un prototipus passabaix en qualsevol altre tipus de filtre: passaalt, passabanda o rebutjabanda.



Filtre de Butterworth

Aquest tipus de filtres es caracteritzen per tenir una magnitud màximament plana a la banda de pas, característica sovint molt desitjable en força aplicacions. També presenten una magnitud monòtona decreixent amb la freqüència, i el seu valor quadràtic és:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

on N és l'ordre del filtre, o el nombre de pols que té. Aquest filtre no té zeros en el domini analògic, és per tant un filtre totpols (vegeu les figures B.1 i B.2 de la pàgina 825 de [Oppenheim1999]). La magnitud d'aquest filtre decau de l'ordre de $6N$ dB per octava o $20N$ dB per dècada quan s'expressa amb el guany $G(\Omega) = 20 \log_{10}(|H_c(j\Omega)|)$ i per valors de freqüència $\Omega \gg \Omega_c$, on Ω_c és la freqüència de tall del filtre on $|H_c(j\Omega_c)| = 1/2$ o $G(\Omega_c) \approx -3$ dBs. Així doncs, a major ordre més selectiu serà el filtre, o més aviat atenuarà les freqüències fora de la banda de pas.

De l'anterior equació, substituint $j\Omega = s$ s'arriba a:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}$$

Així doncs, els pols d' $H_c(s)H_c(-s)$ els trobem igualant el denominador a 0, d'on resollem que:

$$s_k = (-1)^{1/2N} j\Omega_c = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)} \quad 0 \leq k \leq 2N-1$$

el que ens diu que hi ha $2N$ pols equiespaiats en angle π/N i de radi Ω_c . De tots aquests pols la meitat $k = \{1, 2, \dots, N\}$ pertanyen a $H_c(s)$ i l'altra meitat $k = \{0, N+1, \dots, 2N-1\}$ a $H_c(-s)$ de forma que els primers es troben a la regió d'estabilitat, ja que els angles estan acotats dins de $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ (semiplà esquerre d's).

A partir dels pols podem reconstruir la funció de transferència amb l'expressió següent:

$$H_c(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (1 - s/s_k)} = \frac{\prod_{k=1}^N s_k}{\prod_{k=1}^N (s_k - s)}$$

si es vol que el filtre tingui un guany diferent de la unitat només cal multiplicar la funció de transferència pel guany desitjat G .

El disseny d'un filtre de Butterworth passabaix en base a unes especificacions donades es pot fer, per exemple, a partir de la freqüència de tall Ω_c , i l'atenuació mínima o el guany màxim γ a una certa freqüència $\Omega_s > \Omega_c$, és a dir que $|H_c(j\Omega_s)| \leq \gamma$. Segons



això es pot arribar a la següent expressió de disseny de l'ordre N adequat per assolir aquestes especificacions:

$$N \geq \frac{\log_{10}(1/\gamma^2 - 1)}{2 \log_2(\Omega_s / \Omega_c)}$$

- [Oppenheim1999]p824-p826

Filtres de Chebyshev

Els *filtres de Chebyshev*, a diferència dels *filtres de Butterworth*, ofereixen un arrissat a les bandes de pas i atenuada més optimitzat (més petit) per a un mateix ordre o bé un ordre menor per a unes mateixes especificacions de l'arrissat màxim permès. Això és gràcies al fet que es tracta de filtres que ja no compleixen la característica de tenir una magnitud decreixent de forma monòtona amb la freqüència i màximament plana. Per contra, els filtres de Chebyshev tenen la característica de presentar un arrissat caracteritzat per una certa oscil·lació amb valor de pic constant. Existeixen dos tipus de filtres de Chebyshev: el filtre de Chebyshev tipus I i tipus II. Els primers presenten la característica de l'arrissat de dinàmica constant a la banda passant, mentre que el tipus II l'arrissat apareix a la banda atenuada.

La magnitud de la funció de transferència quadràtica del filtre de Chebyshev tipus I es defineix com segueix a continuació:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\Omega / \Omega_c)}$$

on $V_N(x)$ és el *polinomi de Chebyshev* de grau N definit com:

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x))$$

i per tant, són polinomis que en l'interval $-1 \leq x \leq +1$ es troben acotats a $V_N^2(x) \leq 1$, mentre que per $|x| > 1$ la funció $\cos^{-1}(x)$ retorna valors imaginaris i per tant $V_N(x)$ passa a tenir el comportament del cosinus hiperbòlic incrementant-se de forma monòtona amb la variable x. Aquestes característiques són molt atractives per al disseny de filtres prototipus passabaix.

El polinomi de Chebyshev d'ordre N es pot obtenir a partir dels dos polinomis d'ordres anteriors amb la següent expressió recursiva:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

Per tant, podem afirmar que el aquest serà un filtre totpols.

Els tres paràmetres de disseny d'un filtre del filtre de Chebyshev tipus I són: l'ordre N, la freqüència de tall Ω_c (on ara més aviat es defineix com la freqüència límit de la



banda de pas) i l'amplada de l'arissat especificat pel paràmetre ε . Vegeu la figura B.4 de la pàgina 827 de [Oppenheim1999].

Els pols del filtre de Chebyshev tipus I es troben a sobre d'una el·lipse de semieixos $r_1 = \Omega_c / 2(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N})$ i $r_2 = \Omega_c / 2(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N})$, on $\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}$, concretament als punts:

$$s_k = r_1 \cos \phi_k + j \operatorname{sen} \phi_k$$

on $\phi_k = \frac{\pi}{2N}(2k + N - 1)$ per $1 \leq k \leq N$ (vegeu la figura B.5 de la pàgina 827 de [Oppenheim1999]).

Igual que en el cas del filtre de Butterworth, en el cas del filtre de Chebyshev es poden trobar les expressions òptimes de disseny per satisfer unes determinades especificacions. En aquest segon cas, el valor òptim per l'ordre N del filtre és el valor mínim que compleix la següent condició:

$$N \geq \frac{\log_{10} \left[\frac{(\sqrt{1 - \delta_2^2} + \sqrt{1 - \delta_2^2(1 + \varepsilon)}) / (\varepsilon \delta_2)}{(\Omega_s / \Omega_c) + \sqrt{(\Omega_s / \Omega_c)^2 - 1}} \right]}{\log_{10} \left[(\Omega_s / \Omega_c) + \sqrt{(\Omega_s / \Omega_c)^2 - 1} \right]}$$

on Ω_c és la freqüència límit de la banda de pas, Ω_s és una freqüència superior a Ω_c on el guany del filtre és $|H_c(j\Omega_s)| = \delta_2$ (per especificar la caiguda del filtre a la banda atenuada). Normalment el paràmetre ε s'especifica indicant l'amplada de l'arissat δ en dBs amb què:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - 10^{-\delta/10}}$$

Existeixen també els *filtres de Chebyshev tipus II*, que a diferència dels *tipus I*, tenen l'arissat de pic constant a la banda atenuada per comptes d'a la banda de pas, i són filtres amb pols i zeros, per comptes de només topols. Deixem a l'alumne l'aprofundiment en altres tipus de filtres analògics com són aquest o els *filtres el·líptics* (que tenen l'arissat fluctuant en ambdues bandes de pas i atenuada, i presenten un comportament encara més òptim que els vistos fins ara).

- [Oppenheim1999] p826-p828

5.5.1. Problemes de disseny de filtres discrets a partir de filtres analògics

A continuació se us proposen alguns problemes de disseny de filtres discrets a partir de filtres analògics.



Problema 1

Dissenya un filtre passabaix discret aplicant el mètode de la *invariància impulsional* a un filtre analògic de Butterworth. Es demana que en el disseny es satisfacin les següents restriccions:

$$\begin{aligned} 0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.17783 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

Fes el disseny dividint el procés en tres passos:

- 1.- Converteix les especificacions del filtre discret en especificacions del filtre analògic utilitzant la relació del mapatge freqüencial establerta pel mètode de la *invariància impulsional*, deixant-les en funció del paràmetre T_d .
- 2.- Determina el valor mínim de l'ordre N així com la quantitat de $T_d\Omega_c$ tal que es compleixin les especificacions anteriors. Troba l'expressió de la funció de transferència $H_c(j\Omega)$ en funció del paràmetre T_d .
- 3.- Fes la conversió d'analògic a digital i obté la funció de transferència $H(z)$ del filtre digital. Influeix el valor de T_d en el disseny final ?

Vegeu la solució a [Oppenheim1999] p842-p843 (o problema similar a l'exemple 7.2 pàgines p446-p449).

Problema 2

Dissenya un filtre passabaix discret aplicant el mètode de la *transformació bilineal* a un filtre analògic de Butterworth amb les mateixes especificacions que el problema anterior. Segueix els mateixos passos que es demanaven a l'anterior problema, però ara fixa el valor de $T_d = 1$.

Una vegada finalitzat el disseny comprova si el filtre discret satisfà les especificacions amb la funció *freqz* del MATLAB.

5.6. Transformacions freqüencials en el domini analògic

Les tècniques de disseny de filtres analògics es centren en el disseny de filtres prototipus passabaix. No obstant això, és possible reutilitzar el disseny d'un filtre passabaix per tal de dissenyar un filtre passaalt, passabanda o rebutjabanda mitjançant una *transformació freqüencial*.

En general, aquestes transformacions s'assoleixen realitzant un simple canvi de variable del tipus:

$$H_f(s) = H_i(T(s))$$



on $H_i(s)$ és el filtre original prototipus passabaix i $H_f(s)$ és el filtre final una vegada s'ha realitzat la transformació freqüencial $T(s)$.

A continuació es mostren les transformacions freqüencials de passabaix a passabaix/alt/banda. La resta de transformacions freqüencials les podeu trobar a la plana 647 d'aquest llibre.

Transformació passabaix a passabaix

Aquesta transformació no canvia el tipus de filtre (passabaix) però sí les seves característiques (freqüència de tall). La transformació és:

$$T(s) = \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s$$

On Ω_p és la pulsació de tall del prototipus passabaix original i Ω_p' és la pulsació de tall del filtre prototipus passabaix final.

Transformació passabaix a passaalt

En aquest cas la funció de mapatge és la següent:

$$T(s) = \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}$$

on Ω_p és la pulsació de tall del prototipus passabaix original i Ω_p' és la pulsació de tall del filtre prototipus passaalt final.

Es pot comprovar que el mapatge fa coincidir exactament els punts característics de les funcions (pulsacions de tall) i que es tracta d'un mapatge no lineal de freqüències, cosa que provoca que es perdi la propietat de linealitat de fase en el resultat final en el cas que el filtre original la complís.

Transformació passabaix a passabanda

En aquest cas la funció de mapatge és la següent:

$$T(s) = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$$

on Ω_p és la pulsació de tall del prototipus passabaix original i $\Omega_l < \Omega_u$ són les pulsacions de tall de les bandes inferior i superior del filtre prototipus passabanda final, respectivament.



5.6.1. Transformacions freqüencials en el domini discret

En el domini discret es pot aplicar la mateixa filosofia per tal de convertir filtres passabaix en filtres passaalt, passabanda o rebutjabanda. En aquest cas la funció de transformació freqüencial és $g(z^{-1})$ de forma que:

$$H_f(z^{-1}) = H_i(g(z^{-1}))$$

on $H_i(z^{-1})$ és el filtre prototipus passabaix original i $H_f(z^{-1})$ és el filtre prototipus final. La funció de transformació ha de garantir que es mapa l'interior del cercle unitat sobre sí mateix i que també es mapi el cercle unitat sobre sí mateix.

Només a títol d'exemple, vegem la funció de mapatge per convertir un filtre discret passabaix en un altre passabaix/alt. La resta de transformacions freqüencials les podeu trobar a la plana 649 d'aquest llibre.

Transformació passabaix a passabaix

En aquest cas la llei de transformació és la següent:

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$$

$$\text{on } a = \frac{\sin\left[\frac{(\omega_p - \omega_p')}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\omega_p + \omega_p')}{2}\right]}$$

i ω_p i ω_p' són les pulsacions de tall dels filtres original i final respectivament.

Transformació passabaix a passaalt

En aquest cas la llei de transformació és la següent:

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

$$\text{on } a = -\frac{\cos\left[\frac{(\omega_p - \omega_p')}{2}\right]}{\cos\left[\frac{(\omega_p + \omega_p')}{2}\right]}$$

i ω_p i ω_p' són les pulsacions de tall dels filtres original i final respectivament.

RESUM

En aquesta sessió hem acabat d'estudiar les tècniques necessàries per poder realitzar el disseny de filtres digitals a partir de tècniques de disseny de filtres analògics. Hem repassat el disseny d'alguns filtres analògics concrets, i hem vist les transformacions freqüencials que ens permeten afrontar el disseny d'un filtre discret tipus passabaix, passaalt, passabanda o rebutjabanda.



SESSIÓ 26

- ❖ Nom: Introducció als filtres òptims i filtres adaptatius.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 1 hores
- ❖ Dedicació: 1.5 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

OBJECTIUS

En aquesta sessió iniciem l'estudi de tot un conjunt de tècniques de disseny de filtres emmarcades dintre del concepte de filtratge lineal òptim i filtratge adaptatiu. Es pretén presentar els conceptes més importants associats a aquest tipus de filtres així com la justificació de la seva utilitat en aplicacions reals dintre del camp de processament de senyal.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem una introducció a la teoria de l'estimació, l'estimació lineal òptima i l'estimació mitjançant sistemes adaptatius que permetin realitzar un seguiment de processos no estacionaris.

6. Filtratge òptim i filtres adaptatius

6.1. Introducció al problema d'estimació

En aquest capítol iniciem un camí d'estudi dintre d'un conjunt de tècniques de filtratge amb un plantejament totalment desconegut fins aquest moment. La teoria de la transformada de Fourier és una teoria útil i aplicable en el camp dels senyals determinístics i fins aquest moment tot el plantejament de disseny i estudi de sistemes s'ha fet tenint en ment les eines proporcionades per la transformada freqüencial.

Fins aquest moment s'entenia un filtre com un dispositiu capaç de particionar l'espai freqüencial i seleccionar les components de senyal existents en diferents bandes. No obstant això, la majoria de problemes als quals ens hem d'enfrontar en aplicacions reals es donen en un escenari en què apareixen els senyals de naturalesa aleatòria i en què ens veiem obligats a canviar-ne la descripció. En aquests entorns un senyal deixa de ser una forma d'ona que respon fidedignament a una expressió matemàtica per passar a ser la realització d'un procés estocàstic que en el millor dels casos podrem descriure vagament amb la mitjana i la variància de les variables implicades.



En aquests escenaris podem continuar aplicant la teoria de Fourier per dissenyar els filtres que formen part dels sistemes, però existiran nombroses aplicacions en què les característiques estadístiques dels senyal implicats ens permetran realitzar el disseny d'uns filtres que funcionen molt millor en aquest tipus d'entorns.

El problema d'estimar un determinat senyal és una aplicació molt comuna en processament de senyal. El disseny d'un receptor digital estima els bits rebuts, un sistema de radar estima la distància a què es troba l'objectiu, un sistema de cancel·lació de soroll estima el senyal sorollós distorsionant i elimina la seva influència sobre el senyal objectiu, etc... En totes aquestes aplicacions ens enfrontem a un entorn de senyal de naturalesa aleatòria en què els conceptes de disseny de filtres i sistemes en general es pot plantejar dintre d'un marc de la teoria de l'estimació.

6.1.1. El concepte de filtratge òptim

En un problema d'estimació sempre podem parlar de l'estimador òptim com aquell estimador que dona el millor resultat dintre de tot el conjunt de possibilitats. En molts casos ens podem plantejar el problema de disseny de filtres dintre d'un marc de la teoria de l'estimació. El senyal d'entrada representa l'univers o marc de coneixement i el filtre realitza les operacions necessàries per estimar un determinat senyal de sortida. No es pot utilitzar la paraula *òptim* sense definir un criteri de mesura que permeti la quantificació dels resultats de l'estimador, ja que aquest serà el paràmetre que ens marcarà les prestacions del sistema. En els casos que nosaltres estudiarem, el criteri vindrà determinat per la variància d'un determinat senyal error definit segons el plantejament del problema.

En un problema de disseny d'un filtre òptim no es pretén disposar d'un filtre que tingui una banda de transició molt reduïda o un filtre que tingui una fase lineal. Els criteris que ens porten al disseny d'un filtre òptim sempre vindran donats en funció de les característiques dels senyals implicats, ja que estarem dissenyant el millor filtre possible segons un determinat criteri per a un determinat entorn de treball. Tots aquests factors són necessaris de cara al disseny d'aquest tipus de filtres i la seva desconexença ens portarà inevitablement al fracàs.

En qualsevol cas, si es disposa de la informació necessària, el disseny del filtre òptim ens pot ajudar a netejar senyals d'interferències que es trobin dintre de la seva banda, un problema impossible de plantejar amb les tècniques estudiades fins aquest moment. Evidentment, per poder dur a terme amb èxit un problema d'aquest tipus serà necessari tenir una caracterització de tots aquests senyals dintre d'un domini que ens permeti identificar-los i separar-los de forma adequada. Aquesta identificació es farà en funció de les seves característiques estadístiques.

6.1.2. Necessitats dels filtres adaptatius

Un altre problema afegit en moltes aplicacions de processament són els canvis de les característiques de l'entorn en funció del temps. Per tots nosaltres és conegut com un canal de comunicacions pot variar en funció del temps (Ex. Canal mòbil, canal ionosfèric, etc...) o com el soroll produït per un motor varia en funció de les revolucions



a les quals treballa. Davant aquest tipus de problemes el disseny del filtre òptim es complica ja que les característiques dels senyals implicats en l'escenari són dinàmiques i varien en funció del temps.

El problema del disseny del filtre òptim des d'aquest punt de vista no és abordable si no disposem d'un sistema capaç d'anar estimant les estadístiques dels senyals implicats i adaptar el disseny del sistema de forma progressiva fent les correccions pertinents. Aquesta és la idea que hi ha en el referent d'un filtre adaptatiu. Si les condicions de treball ens permeten la possibilitat d'enfocar el problema des d'aquesta òptica, no només estarem donant la millor solució possible sinó que a més l'anirem recalculant adaptant-nos als canvis d'entorn oferint la millor solució possible a cada instant de temps.

Els filtres adaptatius no són la solució universal ja que no sempre s'estarà en condicions de plantejar el problema d'aquesta forma, i no sempre podrem estimar les característiques dels senyals implicats per poder dissenyar un sistema d'aquest tipus però en el cas que això sigui possible, ofereixen una solució excel·lent a moltes aplicacions de processament de senyal.

Una introducció als conceptes presentats aquí la teniu sintetitzada en els apunts de processament de senyal, capítol de filtres adaptatius a l'apartat 1.

6.1.3. Estimació Lineal i no Lineal

En aquest apartat es pretén realitzar una breu descripció dels diferents tipus d'estimadors que podem trobar a la bibliografia així com la descripció genèrica del concepte d'estimador. En un problema genèric d'estimació d'un determinat senyal o paràmetre es pretén donar una bona aproximació al valor de la variable objectiu en funció d'un conjunt de mesures d'altres variables a partir de les quals es fa l'estimació. La bondat del procés d'estimació vindrà determinada per la qualitat de les mesures i la relació que aquestes tinguin amb la variable objectiu. Aquest concepte el teniu descrit als apunts de processament de senyal a l'apartat 2.1 del capítol de filtres adaptatius.

Estimadors no lineals

Els estimadors no lineals són aquells que realitzen el procés d'estimació del senyal objectiu amb operacions no lineals de les variables d'entrada. Entre aquest tipus d'estimadors existeixen alguns de ben coneguts a la bibliografia com ara el *Maximum a Posteriori (MAP)*, l'estimador de *màxima versemblança (ML)* o un de més conegut com ara el *Mean Square (MS)*. L'objectiu d'aquest curs no és profunditzar en aquest tipus d'estimadors sinó simplement remarcar-ne l'existència. Aquests estimadors funcionen tant millor en funció de com la descripció probabilística de les variables s'ajusta a la realitat. No sempre resulta fàcil obtenir la funció d'estimació segons aquests criteris i difícilment és aplicable en problemes de disseny de sistemes.



Estimador LMS

L'estimació LMS (Least Mean Square) és una metodologia d'estimació de gran utilitat en el cas de senyals i sistemes discrets. L'estimador LMS es dissenya com aquell estimador lineal de les variables d'entrada que dona com a resultat l'error quadràtic mitjà mínim de tots els possibles estimadors. Entre els avantatges subjacents a aquest estimador podem citar les següents:

- 1.- El procés d'optimització és matemàticament tractable de forma senzilla ja que passa per la minimització d'una funció quadràtica fàcilment derivable. D'altra banda, aquest procés està associat a un concepte físic com ara la minimització de la potència del senyal error.
- 2.- L'estimador és lineal cosa que permet el tractament de tota la teoria de senyals i sistemes discrets.
- 3.- L'obtenció de l'estimador LMS només requereix una descripció dels moments de primer i segon ordre de les variables implicades en el procés, no essent necessari el coneixement de les PDFs de les variables aleatòries i essent suficient el coneixement del valor mitjà, les variàncies i les funcions de correlació de les variables implicades, paràmetres fàcilment estimables en funció de les dades del senyal.

Una descripció d'aquests conceptes la podem trobar als apunts de processament de senyal, capítol de filtratge adaptatiu, apartat 2.1.

RESUM

En aquesta sessió hem introduït els conceptes bàsics de la teoria de l'estimació i hem preparat el camí per entrar de ple en els conceptes d'estimació lineal òptima que seran tractats a la propera sessió. No és necessari assolir un coneixement profund dels estimadors no lineals ni de les seves característiques, però sí que convé com a mínim presentar-los breument i ser conscients de la seva existència i de les seves bones prestacions en altres tipus d'aplicacions. No obstant això, en el camp dels senyals i sistemes discrets treballarem amb estimadors lineals i l'estimador LMS s'adapta perfectament oferint solucions extraordinàries en un ampli conjunt d'aplicacions.



SESSIÓ 27

- ❖ Nom: L'estimador Lineal Òptim LMS
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 03 hores
- ❖ Dedicació: 4.5 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A la sessió anterior vàrem descriure breument els conceptes de la teoria de l'estimació per situar el problema de filtratge òptim. Es van veure els diferents tipus d'estimadors coneguts i finalment es va presentar l'estimador LMS (Least Mean Square) en el qual ens centrarem durant tota la resta del capítol de filtratge adaptatiu.

OBJECTIUS

En aquesta sessió es definiran els conceptes bàsics del filtre lineal òptim o filtre de Wiener en aplicacions de tractament del senyal. Presentarem les seves principals característiques com a estimador LMS així com altres conceptes addicionals com la funció a minimitzar i el procés de resolució de l'estimador òptim.

CONTINGUTS

En aquesta sessió entrarem a estudiar amb detall el problema de l'estimació lineal òptima basada en l'ús d'un filtre F.I.R. Definirem una funció objectiu o funció de cost la minimització de la qual servirà com a criteri de disseny del filtre. S'introdueix la notació vectorial, la qual facilita tant la nomenclatura com el càlcul posterior. Veurem també el principi d'ortogonalitat com una altra forma d'interpretació del resultat del procés d'optimització dels coeficients del filtre.

6.2. Estimació Lineal Òptima. El filtre Wiener

En aquest apartat començarem a desenvolupar els conceptes associats al filtre de Wiener o filtre lineal òptim. El filtre de Wiener és un filtre lineal que resol el problema de l'estimador lineal òptim segons el criteri LMS de tal forma que realitza el disseny d'un filtre lineal que minimitza la potència d'un determinat senyal error. El senyal error es defineix com la diferència entre el senyal de sortida del filtre i un senyal de referència conegut pel sistema.

Atès que estem treballant en el domini de senyals temporals haurem de veure aquests com realitzacions d'un procés estocàstic. Segons aquesta perspectiva la mostra del senyal a cada instant de temps és una variable aleatòria amb una determinada funció



densitat de probabilitat. La caracterització complerta d'un procés estocàstic vindrà donada pel coneixement de totes les variables aleatòries implicades així com la relació existent entre totes elles. D'aquí es pot deduir que aquest procés serà difícilment tractable sense imposar algunes restriccions sobre els senyals amb què treballem.

El filtre de Wiener realitza una combinació lineal de les variables d'entrada ponderades amb la seva resposta impulsional, i està dissenyat específicament per minimitzar la potència del senyal error existent entre el senyal de sortida i un determinat senyal de referència. En funció de la relació entre el senyal d'entrada al filtre i el senyal de referència es pot parlar de problemes d'*allisament (smoothing)*, *filtratge* o *predicció*. Una descripció de tots aquests conceptes la tenim als apunts de processament, capítol de filtres adaptatius, apartat 2.2.

Nomenclatura

Abans de començar a definir el procés de disseny i el plantejament matemàtic del filtre de Wiener convé determinar la nomenclatura que es farà servir. Aquest factor és important ja que la representació vectorial del filtre de Wiener permet plantejar interpretacions geomètriques del problema que sempre són aclaridores i faciliten la comprensió i l'estudi.

$$\hat{y} = \vec{h}^H \vec{x}$$

$$e = (y - \hat{y}) = (y - \vec{h}^H \vec{x})$$

El problema de filtratge lineal pot representar-se segons una operació de producte escalar de la següent forma:

$$\hat{y} = \vec{h}^H \vec{x}$$

$$\hat{y} = \hat{y}[n] \quad e = e[n]$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-k] \end{bmatrix} \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[k] \end{bmatrix}$$

on

$$\hat{y} = \hat{y}[n]$$

és el senyal de sortida del filtre

$$\vec{h} = [h[0], h[1], \dots, h[k]]^T$$

és un vector amb el conjugat de la resposta impulsional del filtre i $(\cdot)^H$ és l'operador *hermític* (transposició i conjugació de les components del vector), i

$$\vec{x} = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-k]]^T$$



és un vector que conté tota la memòria de les mostres del senyal d'entrada que hi ha dins del filtre.

D'aquestes expressions s'observa com la memòria del filtre en un instant n ve representada per un vector x i com la resposta impulsional també té una representació vectorial. Segons aquesta nomenclatura, el senyal estimat $\hat{y} = \vec{h}^H \vec{x}$ és simplement el producte escalar entre la resposta impulsional i la memòria del sistema en aquell instant de temps.

Aquesta interpretació dóna una visió interessant aplicable al filtratge lineal segons la qual els filtres presenten guanys elevats a aquelles freqüències que s'assemblen a la resposta impulsional tal i com s'havia comentat en algun capítol anterior.

Característiques de la funció de cost

Tot procés d'optimització requereix un criteri de mesura per comparar i determinar quina de les possibles solucions al sistema és la millor. En el cas del filtre de Wiener la *funció de cost* emprada o el criteri d'optimitat, la minimització del qual ens portarà a la solució òptima, és l'error quadràtic mitjà del senyal error definit segons:

$$E[e^2]_{MIN} = E\left[(y - \vec{h}^H \vec{x})(y - \vec{h}^H \vec{x})^H\right]_{MIN}$$

on

$$y = y[n]$$

és el senyal objectiu que es desitja que el filtre estimi de forma lineal a partir del senyal d'entrada.

En aquesta expressió s'ha representat la funció de cost fent ús de la representació vectorial cosa que facilita la representació i el posterior procés d'optimització. Aquesta funció de cost presenta algunes característiques que val la pena remarcar ja que incideixen notablement en les característiques i propietats del filtre dissenyat. Per començar podem veure que es tracta d'una funció quadràtica i com a tal tindrà un únic mínim absolut que serà la solució del filtre de Wiener. D'altra banda, donades les seves característiques de funció quadràtica serà fàcilment derivable i la solució s'obtindrà amb la resolució d'un sistema d'equacions lineals, cosa que simplifica notablement el problema.

Procés de disseny del filtre de Wiener

El procés de disseny del filtre de Wiener passa per la minimització de la funció de cost. Es tracta d'un problema multidimensional en què el nombre de graus de llibertat dependrà de l'ordre del filtre en qüestió. A priori, podem veure que es tracta d'un procés llarg i tediós, però la representació vectorial del problema simplifica



sensiblement el procediment i permet arribar a una expressió tancada en forma de sistema d'equacions lineal.

Un factor important a remarcar en aquest concepte és que el filtre dissenyat segons aquest criteri és el millor de tots els possibles, però en cap moment vol dir que sigui un filtre de bones prestacions, tot dependrà de les característiques dels senyals implicats i la relació d'aquest amb el senyal objectiu.

Un desenvolupament del procés d'optimització del filtre de Wiener el podem trobar als apunts de tractament del senyal, capítol de filtratge adaptatiu, apartat 2.2 . Aquest desenvolupament ens porta a una solució del tipus $\overline{r_{yx}} = \underline{\underline{R_{xx}}} \overline{h_{opt}}$ on el vector $\overline{r_{yx}}$ és el vector de correlació creuada i $\underline{\underline{R_{xx}}}$ la matriu de correlació de les variables d'entrada.

Per poder arribar a aquesta conclusió es considera que els processos estocàstics implicats són processos *estacionaris en sentit ampli*, és a dir, que els seus valors mitjans són constants en el temps i que les funcions de correlació només depenen de la distància temporal entre variables. Si a més són *ergòdics*, l'estimació del vector de correlació creuada i de la matriu d'autocorrelació es podrà realitzar en funció del càlcul de mitjanes temporals.

Si analitzem amb detall la conclusió a què arribem, podem observar que el vector $\overline{r_{yx}}$ té una importància vital en les prestacions del filtre resultant. Aquest vector mesura la similitud de la variable objectiu $y[n]$ amb totes i cadascuna de les variables de la memòria del filtre. A més similitud existeixi més fiable serà el resultat de l'estimació i més petita serà la potència de l'error. D'altra banda, la matriu d'autocorrelació $\underline{\underline{R_{xx}}}$ mesura la informació mútua que porten les variables de l'espai d'estimació i la resolució del sistema s'encarrega d'eliminar la informació creuada i donar el resultat òptim.

Cal insistir en aquest concepte ja que és vital per a l'enteniment dels conceptes associats al filtre de Wiener ja que si les variables de l'espai d'estimació estan fortament correlades, la informació que aporten al sistema és pràcticament la mateixa i la resolució del sistema d'equacions s'haurà d'encarregar de cancel·lar-la i quedar-se només amb la informació nova que aporta cada variable.

6.2.1. Principi d'ortogonalitat

El problema d'estimació plantejat en l'apartat anterior així com la resolució del sistema d'equacions formen part del mètode formal per obtenir el filtre òptim o filtre de Wiener. En qualsevol cas, existeix la possibilitat de plantejar el problema en termes geomètrics i aquest nou plantejament ens ajudarà a entendre els conceptes relacionats amb la teoria de l'estimació així com a simplificar-nos el procés de càlcul de les equacions del sistema, evitant tot procés de derivació i aplicant simplement conceptes geomètrics.



Espai de variables aleatòries o espai de Hilbert

En el problema del filtratge lineal, donades les característiques de la funció de cost, les variables aleatòries implicades en el procés d'estimació només requereixen estar caracteritzades fins als seus moments de segon ordre, ja que són els termes que intervenen en el sistema d'equacions a resoldre. Si en aquest espai de variables aleatòries estem en condicions de definir operacions de combinacions lineals (com és el cas) i podem definir un producte escalar ben definit, aquest espai tindrà el comportament d'un espai de Hilbert.

La caracterització del problema des d'aquest punt de vista permet l'aplicació de conceptes geomètrics i la interpretació dels mateixos per a la comprensió i resolució del problema. En aquest cas, el producte escalar definit és l'operador de correlació creuada

$$\langle X, Y \rangle = E[X^*Y]$$

Aquest operador es pot demostrar que compleix totes les propietats d'un producte escalar ben definit de tal forma que permetrà parlar dels conceptes d'ortogonalitat, norma de vectors i qualsevol interpretació geomètrica relacionada. La definició del problema en aquests termes simplifica enormement el procés de disseny del filtre de Wiener.

Coeficient de Projecció

Un dels conceptes més importants en la interpretació geomètrica és la projecció d'un vector sobre un subespai determinat. Als apunts de processament (Capítol de Filtres adaptatius, apartat 2.3), podeu trobar una representació geomètrica d'aquest problema. Si volem calcular la projecció d'un vector \bar{y} sobre el subespai engendrat pel vector \bar{x} serà necessari definir un concepte de mesura que permeti quantificar l'error que s'està cometent. En conceptes geomètrics la projecció es calcula normalment minimitzant el mòdul del vector error (normalment definit segons el producte escalar existent).

La millor projecció segons aquest criteri es calcula segons els coeficients de projecció, definit com aquell coeficient de la combinació lineal que dóna la millor aproximació del vector \bar{y} . Aquest concepte queda clarament representat als apunts.

El coeficient de projecció es defineix segons

$$\hat{\bar{y}} = a_{opt} \bar{x}$$
$$a_{opt} = \frac{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$$
$$c = \frac{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$$



Aquest coeficient té especial interès i el seu sentit geomètric, el coeficient de la combinació serà proporcional al producte escalar entre \bar{y} i \bar{x} , és a dir, com més similitud o colinearitat existeixi entre els dos vectors més gran serà el coeficient, i d'altra banda, també serà inversament proporcional al mòdul del vector \bar{x} , ja que com més gran sigui \bar{x} menor haurà de ser el coeficient que el ponderi.

En l'espai de *Hilbert* definit per les variables aleatòries, simplement cal definir el producte escalar en termes de la funció de correlació quedant aquest

$$a_{opt} = \frac{r_{yx}}{r_{xx}}$$

essent la interpretació geomètrica exactament la mateixa. Com més similitud estadística existeixi entre ambdós vectors més gran serà el coeficient i millor serà la projecció.

Sistema d'equacions normals

El procediment d'optimització i derivació parcial necessari per plantejar les equacions del sistema ens porta a un sistema d'equacions que té una significativa interpretació geomètrica. Als apunts de processament (Capítol de Filtres adaptatius, apartat 2.3), podeu trobar el desenvolupament matemàtic i la interessant conclusió a què s'arriba que dóna lloc al conegut principi d'ortogonalitat i al sistema d'equacions normals.

Tal i com es desprèn del desenvolupament, els coeficients òptims del filtre els tenim quan el vector error és ortogonal al subespai sobre el qual projectem. Això és el mateix que afirmar que el vector error és ortogonal a tots els vectors amb què fem l'aproximació de forma simultània, donant lloc al conegut sistema d'equacions del filtre de Wiener. L'espai sobre el qual projectem en aquest cas està format per les variables d'entrada al filtre $[x[n] \ x[n-1] \ \dots \ x[n-N+1]]$ i la solució òptima la tindrem quan el vector error sigui ortogonal de forma simultània a tots i cadascun d'aquests vectors d'entrada. Aquest desenvolupament el teniu als apunts de processament (Capítol de Filtres adaptatius, apartat 2.3). En aquest apartat podeu trobar el desenvolupament matemàtic així com les conclusions i punts més importants a remarcar sobre el problema del filtre de *Wiener* i la seva interpretació geomètrica. Finalment també disposeu d'un exemple pràctic d'aplicació de tots aquests conceptes.

RESUM

En aquesta sessió s'han presentat els conceptes associats a la teoria del filtre de *Wiener* de durada finita. Hem obtingut el sistema d'equacions a resoldre des d'un punt de vista purament matemàtic i posteriorment hem arribat a la mateixa conclusió amb una interpretació geomètrica molt més didàctica i entenedora. Tots aquests conceptes ens han portat finalment a l'anàlisi d'un exemple pràctic així com dels diferents resultats obtinguts.



SESSIÓ 28

- ❖ Nom: Generalització del Filtre de Wiener i introducció al filtratge adaptatiu.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 2 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem estudiar en profunditat l'estimació lineal òptima mitjançant un filtre de resposta impulsional finita.

OBJECTIUS

Un cop analitzades les característiques bàsiques del filtre de Wiener així com la seva interpretació geomètrica, l'objectiu d'aquesta sessió és generalitzar aquests conceptes al cas del filtre I.I.R. i al predictor lineal. Finalment, introduïrem els conceptes previs al filtratge adaptatiu i presentarem els diferents tipus de filtres que podem trobar.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem com podem generalitzar el procés d'estimació lineal fet fins ara amb filtres F.I.R. per a fer-ho amb filtres del tipus I.I.R. Veurem també el predictor lineal com un exemple d'estimador lineal òptim, i introduïrem els conceptes lligats al filtratge adaptatiu.

6.2.2. Generalització del filtre de Wiener

Els filtres òptims presentats en la sessió anterior corresponen al filtre de resposta impulsional finita F.I.R. En aquest apartat analitzarem les possibilitats de disseny que ofereixen les tècniques en el domini transformat en el disseny de filtres I.I.R.

El disseny d'un filtre òptim de resposta impulsional infinita implicaria la resolució d'un sistema d'equacions de dimensió infinita, quelcom totalment inviable des d'un punt de vista numèric. No obstant això, aquest sistema d'equacions pot ser resolt aplicant tècniques en el domini transformat com ara la transformada Z, i podem arribar a obtenir una solució tancada de la funció de transferència del filtre en qüestió. Aquest capítol no es de gran importància en el temari i simplement pretenem tenir una lleugera visió de la seva existència. Una descripció dels processos implicats en aquest desenvolupament el teniu als apunts de Processament, capítol de filtres adaptatius a l'apartat 2.4. Només cal que revisem aquests conceptes per sobre sense entrar en gaire detall sobre el seu desenvolupament.



6.2.3. El predictor lineal

En aquest apartat analitzarem el disseny del predictor lineal i les diferències respecte al disseny del filtre de Wiener convencional. El cas del predictor lineal no és més que un cas particular on el senyal objectiu o de referència \bar{y} és una versió avançada del senyal $x[n]$. Això simplement provoca uns petits canvis en el sistema d'equacions que s'analitzaran a continuació.

Sistema d'equacions del predictor

En el procediment de disseny d'un predictor lineal el plantejament del problema és lleugerament diferent, en aquest cas el senyal de referència o senyal objectiu $y[n] = x[n+k]$. Per al càlcul de les equacions del predictor i del nou sistema d'equacions es pot recórrer al conegut principi d'ortogonalitat. L'aplicació del principi d'ortogonalitat sobre el predictor només provoca variacions en el vector de termes independents del sistema d'equacions que passa a ser un vector de correlació creuada a un vector d'autocorrelació desplaçat. Aquest fet el podem trobar als apunts de processament, capítol de filtres adaptatius, apartat 2.5.

6.3. Introducció als filtres adaptatius

Els conceptes estudiats en l'estudi del filtre de Wiener permeten el disseny del filtre òptim estàtic, suposant unes condicions d'estacionarietat en els processos implicats en l'aplicació. El procés de disseny del filtre estàtic presenta certs problemes, ja que la matriu de correlació i el vector de correlació creuada han de ser estimats segons algun mètode. La resolució d'aquest problema pot passar per un processament per blocs, útil en algunes aplicacions, o d'altra banda, fent ús d'un processament adaptatiu.

D'altra banda, existeixen tot un conjunt d'aplicacions on no es pot garantir l'estacionarietat dels senyals implicats (Ex. Soroll d'un motor). En aquests casos, donades les variacions que es van donant en els diferents senyals implicats, és necessari recórrer a procediments adaptatius per anar-nos adaptant contínuament a la realitat de l'entorn canviant.

Estructura d'un sistema adaptatiu

Un sistema adaptatiu s'ha de generar segons una estructura que permeti al sistema la identificació de les característiques dels senyals de l'aplicació i anar aprenent de forma gradual els seus canvis per adaptar-se i convergir cap a la solució més òptima. Existeixen diferents estructures que es poden utilitzar per implementar un sistema adaptatiu. En els apunts de processament (apartat 3.1), teniu una descripció de les característiques d'un sistema adaptatiu.



En un sistema d'aquestes característiques l'algorisme de control detectarà els canvis en l'entorn en funció de l'anàlisi del senyal error, i activarà un procediment d'adaptació sobre els coeficients del filtre mirant de reduir la potència del senyal error.

És important remarcar la necessitat del coneixement del senyal de referència $y[n]$ per al correcte funcionament del sistema, ja que sense aquesta referència no es possible dur a terme l'aprenentatge. No obstant això, existeixen tècniques cegues, és a dir, tècniques que no necessiten d'aquest senyal de referència, però que sí que requereixen del coneixement de certes restriccions sobre alguns paràmetres del senyal per poder convergir (Ex. senyals de potència constant o de mòdul constant).

Paràmetres de qualitat d'un filtre adaptatiu

Els filtres adaptatius són sistemes amb capacitat d'adaptar-se als canvis de l'entorn. Existeixen diferents tècniques de filtres adaptatius i tots normalment persegueixen el mateix objectiu, convergir cap a la solució òptima. Quins són els paràmetres que controlen les prestacions d'un sistema adaptatiu? Si tots els sistemes busquen un objectiu similar ha d'existir alguna raó per a l'existència dels diferents mètodes. Els algorismes adaptatius normalment es comparen segons tres paràmetres:

- 1.- Velocitat de convergència.
- 2.- Cost computacional.
- 3.- Robustesa (front al soroll, etc.) i estabilitat

La velocitat de convergència és el temps que requereix el sistema per adaptar-se a un canvi en l'entorn i arribar a la nova solució òptima. Aquest paràmetre és molt important ja que representa la capacitat de seguiment a variacions que presenta l'algorisme. Veurem més endavant que la velocitat pot dependre dels senyals implicats en el procés així com de la seva representació. Si el senyal d'entrada està altament correlat el sistema serà lent ja que li costarà discernir la informació nova que aporta el senyal d'entrada. No obstant això, si les variables de l'entrada s'ortogonalitzen, el sistema veurà més clarament la informació i li serà més fàcil trobar el camí que el porta a la solució òptima. En sessions posteriors repassarem amb detall aquest concepte.

Un altre paràmetre d'interès és el cost computacional, és a dir, el nombre d'operacions a realitzar per dur a terme el procés d'adaptació. Aquest serà un altre procés fonamental en l'estudi de filtres adaptatius. Finalment, l'estabilitat del mètode serà un paràmetre que haurem d'estudiar per analitzar la validesa de l'algorisme estudiat.

RESUM

En aquesta sessió hem presentat els conceptes més interessants sobre la generalització del filtre de Wiener. Hem demostrat la possibilitat de plantejar el disseny d'un filtre adaptatiu de resposta impulsional infinita i la relació amb els conceptes de projecció ortogonal. D'altra banda, també hem vist les característiques del predictor lineal, els petits canvis en les equacions del sistema i el plantejament del mateix seguint els criteris del filtratge òptim. Finalment, s'ha presentat una introducció

als sistemes adaptatius així com les característiques més interessants que aquests presenten i que s'analitzaran en futures sessions.



SESSIÓ 29

- ❖ Nom: El mètode LMS
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem estudiar la generalització del filtre de Wiener a un filtre del tipus I.I.R., el predictor lineal, i alguns conceptes clau sobre el tema del filtratge adaptatiu.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem el mètode LMS (Least Mean Square) i la seva estructura de filtre adaptatiu. Tractarem tots els punts fonamentals d'estudi d'aquest mètode ja que aquest determinarà la base per la presentació d'altres mètodes que estudiarem més endavant.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem amb detall un dels mètodes adaptatius més populars per la seva senzillesa de càlcul i eficàcia en certes aplicacions: el mètode LMS. Estudiarem la superfície d'error, el mètode del gradient descendent, la seva convergència, el mètode LMS i formes d'accelerar la seva convergència.

6.3.1. El mètode LMS (Least Mean Square)

En aquest apartat estudiarem en detall les característiques fonamentals del mètode LMS. Aquest mètode és de gran senzillesa i presenta un cost computacional ínfim comparat amb altres mètodes adaptatius. No obstant això, el gran problema que presenta és la seva lenta velocitat de convergència.

Estudiarem en detall les característiques del problema, l'anàlisi de la funció error i la proposta de l'algorisme del gradient per a la resolució d'aquest problema. Finalment analitzarem la implementació de la versió adaptativa que ens porta a l'algorisme final.



Anàlisi de la superfície d'error

El mètode LMS basa la seva versió adaptativa en la morfologia de la superfície d'error generada en el filtre de Wiener. Recordem que el filtratge lineal òptim o filtre de Wiener consisteix a determinar els coeficients del filtre lineal que minimitza la funció

$$J = E[(y[n] - \hat{y}[n])^2] = E[e^2[n]]$$

és a dir, la minimització de la potència del senyal error.

Si estudiem amb detall les característiques morfològiques d'aquesta funció error veurem que podem plantejar un procés de minimització iteratiu senzill que ens portaria al mínim de la funció. Als apunts de tractament del senyal (Apartat 3.2 del capítol dels filtres adaptatius), podeu trobar una síntesi del procés de generació de la superfície error que cal estudiar amb detall.

El resultat d'aquest estudi és que la superfície error és una funció quadràtica amb un únic mínim absolut. En el cas de dimensió dos, un cas que permet interpretació geomètrica, la superfície quadràtica presenta talls en forma d'el·lipses, on les direccions dels eixos de les mateixes són les dels autovectors de la matriu de correlació, i l'excentricitat depèn de forma proporcional als autovalors. La forma d'aquesta superfície canvia en funció de les característiques de correlació dels senyals, essent tan més crítica com més correlat estigui el senyal a l'entrada del sistema $x[n]$.

Mètode del gradient

L'estructura morfològica de la superfície d'error permet l'aplicació de tècniques d'aproximacions successives com ara el conegut mètode del gradient. Recordem que el mètode del gradient és un mètode matemàtic que detecta la màxima pendent i mou la solució en el sentit contrari mirant d'assolir el valor mínim. Les característiques de la superfície d'error permeten un càlcul senzill de l'expressió del gradient, i una possibilitat per implementar el mètode és aplicar la següent expressió:

$$\begin{aligned}\bar{h}[n+1] &= \bar{h}[n] + \mu(\bar{r}_{yx} - \bar{R}\bar{h}[n]) \\ \nabla J &= -2(\bar{r}_{yx} - \bar{R}\bar{h}[n])\end{aligned}$$

L'algorisme realitza correccions en sentit contrari al vector gradient i assoleix el valor òptim segons un mètode d'aproximacions successives. El gradient està ponderat amb una constant μ que fa que els increments es facin a passos prou petits per evitar la divergència del mètode.

No obstant això, la implementació del mètode del gradient de forma directa no té gaire aplicació a solucions reals. El càlcul del vector gradient implica el càlcul dels vectors de correlació creuada i autocorrelació de les seqüències implicades. Si aquests vectors són estimats directament ens podríem plantejar la resolució segons el mètode directe. No obstant això, veurem que existeixen tècniques per evitar aquest càlcul i oferir una situació adaptativa. Una explicació més exhaustiva de tot aquest



procediment la podem trobar als apunts de tractament (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.2).

Convergència del mètode

El mètode del gradient és un mètode que convergeix cap a la solució òptima sempre que el valor del paràmetre de convergència sigui prou petit. Els valors pels quals el mètode convergirà cap a la solució òptima depenen de les característiques de la superfície de l'error, i aquesta, tal i com hem vist anteriorment, depèn de la matriu de correlació del senyal d'entrada i del vector de correlació creuada. L'anàlisi de la convergència del mètode és fonamental per poder realitzar el disseny de l'algorisme adaptatiu així com per extreure informació sobre la velocitat de convergència.

Un valor petit de la constant μ provoca una convergència lenta però l'algorisme és molt estable, d'altra banda, un valor gran accelerarà el mètode però el pot fer divergir. Les característiques de la superfície d'error depenen dels autovalors i autovectors de la matriu de correlació. L'estudi el teniu desenvolupat als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.2). En aquest apartat trobarem un estudi detallat de la convergència i com afecten els autovalors al disseny de la constant de convergència.

El mètode LMS

En aquest apartat entrarem pròpiament en l'anàlisi de la versió adaptativa del mètode del gradient. El principal problema del mètode del gradient és que requereix l'estimació del vector de correlació creuada i de la matriu de correlació per estimar el vector gradient. Si aquesta estimació s'ha de realitzar podríem plantejar-nos directament la solució del sistema i l'obtenció del valor òptim. Una possibilitat és realitzar una estimació estadística senzilla del vector gradient que eviti la necessitat d'un processament per blocs i que ens porti cap a la solució adaptativa. L'estimació més senzilla que podem fer del vector gradient és realitzar l'estimació del valor esperat amb l'estimació instantània del valor actual. Aquest estimador no és gaire bo, però jugant amb la teoria probabilística, les estimacions efectuades ens indicaran la direcció correcta en promig, i l'algorisme finalment assolirà el valor òptim. En els apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.2) podem trobar una descripció del desenvolupament del mètode LMS.

Acceleració del mètode LMS

Un dels principals problemes del mètode LMS és la velocitat de convergència. La superfície de convergència és quadràtica i depèn directament de les característiques dels senyals implicats. Quan els senyals d'entrada estan molt correlats existeixen direccions de gran pendent i direccions de pendent més baix. Atès que el mètode ha de funcionar en totes les direccions això restringeix el valor de la constant μ i això condiona la convergència de l'algorisme.

Es pot demostrar que si apliquéssim una transformació del vector gradient amb una matriu definida positiva es podria arribar a accelerar el mètode de forma notable.

L'acceleració seria màxima si la matriu és la inversa de la matriu de correlació, ja que en aquest cas la convergència es donaria en una única iteració. Això no es viable des del punt de vista d'implementació ja que implicaria el coneixement de la matriu, però si que obre un camí cap a un conjunt de sistemes adaptatius de gran velocitat de convergència. Tots aquests mètodes tenen en comú la decorrelació de les variables d'entrada. Aquesta decorrelació desacobla la informació mútua i dota els algorismes d'una velocitat d'adaptació molt més elevada ja que identifiquen millor les direccions de convergència. Aquest desenvolupament el tenim en els apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.2).

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat el mètode LMS. Hem pogut veure que es tracta d'un mètode derivat del conegut mètode del gradient i que es basa en la morfologia de la superfície de l'error. Una estimació estadística senzilla en funció de l'instant actual dels senyals implicats facilita la implementació d'un mètode que destaca per la seva senzillesa i flexibilitat. Finalment, hem vist una orientació cap a algorismes adaptatius que accelerin la convergència del mètode, ja que aquest és el punt dèbil de l'algorisme LMS.



SESSIÓ 30

- ❖ Nom: Processadors de Gram Schmidt i estructura Lattice
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2.5 hores
- ❖ Dedicació: 4 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem veure el mètode LMS, la seva derivació i les característiques més importants d'aquest com a algoritme adaptatiu útil per a l'estimació lineal òptima de sistemes que tenen variacions temporals.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem els processadors de Gram Schmidt i l'estructura Lattice com a mètodes d'implementació de filtres adaptatius que acceleren notablement la velocitat de convergència comparada amb el mètode LMS. Veurem que ambdós mètodes basen les seves prestacions en l'ortogonalització de les dades d'entrada i en l'aplicació de diferents velocitats de convergència sobre cadascuna de les direccions obtingudes.

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem els processadors de Gram Schmidt i les estructures Lattice com a eines per ortogonalitzar senyals que estiguin fortament correlats.

6.3.2. Processadors de Gram Schmidt

El mètode d'ortogonalització de Gram Schmidt és un mètode àmpliament conegut en el camp de l'àlgebra lineal. En el tractament del filtre de Wiener hem tractat els senyals com a processos aleatoris que formen un espai de Hilbert. La definició d'un producte escalar (funció de correlació) i la interpretació de les variables aleatòries com a vectors dintre d'un espai vectorial facilita l'aplicació de conceptes geomètrics en el disseny de les estructures dels filtres adaptatius.

El gran avantatge d'una base ortogonal de vectors és que la projecció de qualsevol vector sobre el subespai que la base genera s'aconsegueix directament projectant sobre els diferents vectors de forma independent i sumant les contribucions. Aquest fet es dona perquè en aquest cas els vectors representen informació totalment independent, i l'estimació del vector final s'obté sumant la contribució de les diferents informacions del vector de la base.



Ortogonalització de les variables de l'espai d'entrada

Els processadors de Gram Schmidt tenen una primera etapa que genera una base ortogonal representativa de l'espai d'entrada. Aquesta primera etapa decorrela la informació mútua continguda en les diferents variables i genera una nova base representativa de la mateixa informació però formada per variables totalment ortogonals. El procés d'ortogonalització de Gram Schmidt és un procés àmpliament conegut en què a cada vector de la base original se li treu tota projecció sobre els elements anteriors de la base. Aquest procés segueix una estructura que podem trobar descrita als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.3). Els coeficients de l'estructura de Gram Schmidt coincideixen amb els coeficients de projecció descrits en aquest capítol ja que el procediment d'ortogonalització es basa en els conceptes de projecció que ja hem vist.

Convergència en el procés d'ortogonalització

Un aspecte important en el procés d'ortogonalització de Gram Schmidt és la seva velocitat de convergència, és a dir, la velocitat del sistema per generar la nova base ortogonal. Aquest estudi és necessari ja que el sistema no estarà en condicions de realitzar l'estimació de la variable objectiu mentre que no es generi la nova base ortogonal.

El gran avantatge en el procés de convergència és que la base ortogonal independitza les components dels diferents vectors implicats, evitant la interferència mútua que era el factor que degenerava el comportament en el LMS. El fet que la base es vagi decorrelant de forma successiva facilita que les constants de convergència de les diferents etapes puguin ser generades de forma independent, de tal forma que el procés de convergència assolirà la mateixa velocitat en l'ortogonalització dels diferents elements de la base. Aquest procediment el tenim explicat en els apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.3).

6.3.3. Estructura Lattice

En el apartat anterior hem pogut estudiar el procés d'ortogonalització de Gram Schmidt com a mètode per generar una base ortogonal i accelerar el procés de convergència d'un sistema d'estimació adaptatiu. En aquest apartat estudiarem l'estructura Lattice. Aquesta estructura persegueix la generació d'una base ortogonal i també realitza una ortogonalització de Gram Schmidt. La gran diferència es que aprofita les característiques d'estacionarietat dels processos implicats per reduir el cost computacional i compactar l'estructura.

Característiques de l'estructura Lattice

En el cas d'estar dissenyant un filtre adaptatiu en una aplicació amb processos estacionaris (cas similar al filtre de Wiener), el procés d'ortogonalització realitzat pot simplificar-se aprofitant les característiques dels processos estacionaris. En aquest cas, la funció de correlació només depèn de la diferència temporal entre variables.



Això vol dir que la similitud de la variable n amb la $n-1$ és la mateixa que la de $n-1$ amb $n-2$ i de totes les que només estiguin separades un índex temporal.

L'aplicació d'una estructura de Gram Schmidt sobre un procés estacionari donaria com a resultat que alguns coeficients de l'estructura convergirien cap al mateix valor, ja que la correlació mútua entre variables separades una unitat temporal és la mateixa a tota l'estructura. Igualment, els coeficients que decorrelen variables separades dos unitats de temps també seran els mateixos. L'estructura Lattice aprofita aquesta redundància temporal per realitzar el càlcul de tots aquests coeficients de forma simultània i reduir l'estructura a un filtre senzill que realitza el mateix procés.

La primera etapa de l'estructura Lattice realitza l'ortogonalització de totes les variables que estan diferenciades una unitat temporal de forma simultània. La segona etapa decorrela aquelles que estan diferenciades dos unitats i així successivament fins aconseguir generar la base ortogonal completa. Un esquema de l'estructura el podem trobar als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.4).

D'altra banda, les característiques de simetria de la funció de correlació fan que el procés de càlcul dels coeficients de projecció es faci en funció de l'error cap a endavant i l'error cap enrere donant més estabilitat al procés numèric i suavitzant el comportament del sistema.

Estimació del senyal objectiu amb l'estructura Lattice

Els processos d'ortogonalització de Gram Schmidt o l'estructura Lattice són dos procediments per generar una base ortogonal de vectors a l'espai d'entrada. Fins aquest moment no hem definit com realitzar l'estimació del senyal objectiu en funció de la nova base ortogonal, però el procediment és notablement més senzill.

El fet de treballar amb una base ortogonal facilita notablement el càlcul de l'estimació, ja que la combinació lineal a resoldre passa simplement pel càlcul dels coeficients de projecció sobre cadascun dels vectors de la base. El procediment és el mateix que seguiríem en el cas del filtre de Wiener respecte al procés d'estimació, amb la qual cosa no es fa necessari tornar a insistir en tots aquests conceptes. El fet que les variables siguin ortogonals aportarà velocitat al sistema i millorarà notablement les característiques del mètode. Podem completar aquest estudi estudiant els apunts de tractament del senyal (Capítol de filtres adaptatius, apartat 3.4).

Un altre avantatge fonamental de l'estructura Lattice és que si per qualsevol motiu hem de modificar la longitud del filtre, és a dir, augmentar el nombre de coeficients, només ens caldrà afegir una nova etapa que serà totalment independent a les anteriors en la seva contribució. Això vol dir que el sistema no cal que faci tot el càlcul novament del filtre a dissenyar, sinó que només haurem d'actualitzar l'aportació del coeficient de la nova etapa. Aquest avantatge també és conseqüència de l'ús d'una base ortogonal.

La conclusió que podem extreure de l'estructura Lattice és que ofereix una velocitat de convergència molt elevada comparada amb el LMS amb un cost computacional relativament reduït. Això ens permet situar a l'estructura Lattice com una opció molt bona de cara a la implementació de filtres adaptatius.

RESUM

En aquesta sessió hem pogut estudiar les característiques del processador de Gram Schmidt i de l'estructura Lattice. EL gran avantatge que aporten aquestes estructures és l'ortogonalització de la base de l'espai d'entrada decorrelant la seva influència mútua i deixant només l'aportació nova de cada element de la base. Les equacions d'adaptació basades en una base ortogonal permeten una acceleració en el procés de convergència comparat amb el mètode LMS convencional. Aquestes estructures esdevenen una bona solució a problemes on la velocitat de convergència sigui un aspecte important de disseny.



SESSIÓ 31

- ❖ Nom: El filtre RLS
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 1.5 hores
- ❖ Dedicació: 2.5 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem veure les estructures de Gam Schmidt i Lattice com a eines per obtenir unes prestacions de convergència millors dels algorismes adaptatius.

OBJECTIUS

En aquesta sessió analitzarem un nou mètode de filtratge adaptatiu de gran velocitat de convergència conegut com el mètode RLS. Aquest mètode és el més ràpid que podem trobar ja que a cada iteració troba la solució òptima de Wiener. El principal problema del mètode RLS és el seu alt cost computacional que dificulta la seva implementació en aplicacions reals.

CONTINGUTS

En aquesta sessió analitzarem els objectius del filtre RLS, la funció de cost, el mètode d'iteració de coeficients i les seves principals característiques.

6.3.4. El filtre RLS

En aquest apartat presentarem el filtre RLS com un mètode de filtratge adaptatiu d'alta velocitat i gran aplicació a entorns variants en el temps. El filtre RLS computa de forma iterativa la solució òptima de Wiener actualitzant la matriu d'autocorrelació i el vector de correlació creuada a mesura que noves dades van entrant al sistema.

Per adaptar l'algorisme a situacions de no estacionarietat, s'aplica un factor de memòria que limita la finestra d'estimació de les correlacions implicades en el procés i permet la implementació del mètode en entorns adaptatius.

Objectius del mètode

L'objectiu del mètode RLS és adaptar de forma iterativa la solució del filtre de Wiener, és a dir, resoldre els coeficients del filtre segons la següent expressió:



$$\begin{aligned}\bar{h}[k] &= \left[\sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} [\bar{x}^T[i] \bar{x}[i]] \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} [d[i] \bar{x}[k]] \right] \\ &= \underline{R}_D^{-1}[k] \underline{p}_D[k]\end{aligned}$$

Com podem extreure de l'expressió anterior, el sistema està resolent el filtre de Wiener on l'estimació de la matriu d'autocorrelació i el vector de correlació creuada es realitza mitjançant un promig temporal de les variables implicades. Cal remarcar dos punts interessants en aquesta implementació. El primer de tots dos és que a mesura que incrementa l'índex temporal k , el bloc de dades que s'utilitza per fer l'estimació és més gran, de tal forma que l'estimació serà més consistent. D'altra banda, l'estimació d'aquestes correlacions es realitza amb un factor de memòria λ (valor entre [0 1]) que pondera amb un pes superior les mostres més immediates, i amb un valor exponencialment decreixent aquelles que es troben més allunyades temporalment.

Aquest procediment representa la millor solució possible amb el volum de dades conegudes fins aquest instant, però presenta el problema de requerir la resolució del sistema a cada nova iteració del mètode. Una explicació d'aquest procediment la podem veure als apunts de tractament del senyal (Capítol de filtres adaptatius, apartat 3.5).

Resolució iterativa del mètode RLS

El principal problema del mètode RLS és el gran cost computacional que suposaria la resolució del sistema per a cada nova mostra de senyal d'entrada. Evidentment, si no es trobés un mètode alternatiu que simplifiqués el problema aquest mètode no podria passar del pur desenvolupament teòric ja que la seva implementació real difícilment seria realitzable.

No obstant això, les particulars característiques de la matriu de correlació del sistema (Matriu Hermítica) permet explotar les seves condicions de simetria per actualitzar el seu valor a cada iteració en lloc de recalcular-ho. En qualsevol cas, seria molt més interessant realitzar aquest mateix procediment directament sobre la matriu inversa, ja que així evitaríem la resolució del sistema que és el procés realment lent. L'adaptació iterativa de la inversa de la matriu de correlació i del vector de correlació creuada permet resoldre iterativament el sistema per a cada nova mostra realitzant un simple producte matriu vector.

El desenvolupament de les equacions de la resolució iterativa de la matriu de correlació es basa en el conegut lema de inversió de matrius, però és un tema que no cal tractar amb èmfasi en aquest curs. Les equacions corresponents a la solució iterativa del mètode RLS les podem trobar als apunts de tractament del senyal (Capítol de filtres adaptatius, apartat 3.5).

Característiques del mètode RLS

Les característiques fonamentals del mètode RLS és l'alta velocitat de convergència del mètode ja que a cada iteració ofereix la solució òptima o solució de Wiener. El

sistema requereix un petit nombre d'iteracions per donar una estimació estadística consistent i arribar a una solució satisfactòria. Comparat amb el mètode LMS és molt més ràpid i el temps de convergència és quasi independent de les dades rebudes. El principal problema del mètode RLS és el gran cost computacional que comporta la seva implementació sobre un sistema real. Existeixen diferents tècniques per intentar aprofitar les característiques de la matriu de correlació que redueixen significativament el cost d'implementació (Fast RLS) però els algorismes resultants són inestables numèricament.

És important remarcar també la importància del factor de memòria. Aquest factor controla la memòria de l'algorisme. Un factor de memòria proper a la unitat (memòria elevada) provocarà un algorisme estable però amb poca capacitat d'adaptació als canvis en l'entorn. D'altra banda, un factor de memòria més petit accelerarà la capacitat de seguiment però empitjorarà l'estabilitat i fiabilitat de la solució.

RESUM

En aquesta sessió hem estudiat les característiques fonamentals del mètode RLS com a mètode adaptatiu per assolir la solució òptima de Wiener. Hem pogut observar la gran velocitat de convergència obtinguda fruit d'un hàbil càlcul recursiu en la inversa de la matriu de correlació i en el vector de correlació creuada que permet resoldre el sistema a cada nova iteració restringint el cost computacional a una cota assolible per un sistema real. No obstant això, el cost computacional del mètode RLS és encara molt superior al LMS i als mètodes basats en processadors de Gram Schmidt o la mateixa estructura Lattice. El coneixement de les característiques i la comparació dels diferents mètodes és vital de cara a poder plasmar aquest coneixement en el desenvolupament d'una aplicació real.





SESSIÓ 32

- ❖ Nom: El filtre de Kalman
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 02 hores
- ❖ Dedicació: 04 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1991]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem estudiar el mètode RLS com a un algoritme adaptatiu ràpid però més costós computacionalment que el mètode d'adaptació LMS.

OBJECTIUS

En aquesta sessió veurem els conceptes bàsics del filtratge de Kalman. Resulta evident la dificultat de plasmar un tema tan ampli en una sessió. No obstant això, l'objectiu d'aquest curs no és aprofundir i tractar de forma exhaustiva els conceptes i la matemàtica associada al filtratge de Kalman, sinó que simplement es pretén presentar els conceptes bàsics relacionats i plantejar-los des d'un punt de vista geomètric. Finalment, intentarem relacionar-los amb els tipus de filtres estudiats anteriorment.

CONTINGUTS

En aquesta sessió farem una breu introducció al model en variables d'estat emprat pel filtre de Kalman i la filosofia emprada a l'hora d'iterar les equacions del filtre.

6.3.5. El filtre de Kalman

El filtre de Kalman és un procés de filtratge adaptatiu fonamentat en la teoria de sistemes en variables d'estat. Aquesta és la gran diferència de plantejament entre el filtre de Kalman i la resta de filtres adaptatius estudiats. La flexibilitat del model matemàtic presentat fa que el filtre de Kalman sigui de gran utilitat en moltes aplicacions d'estimació.

La finalitat del filtratge de Kalman és minimitzar l'error quadràtic mitjà de l'error d'estimació. Com podem veure, l'objectiu del procés de filtratge és el mateix que hem mirat d'aconseguir amb els mètodes estudiats amb anterioritat. Aquest fet permet emprar un anàlisi geomètric similar per facilitar la comprensió dels conceptes associats al filtratge de Kalman.



Modelatge matemàtic del problema

El filtratge de Kalman es desenvolupa a partir de les equacions matemàtiques següents

$$\begin{cases} x(n+1) = \Theta(n+1, n)x(n) + v_1(n) \\ y(n) = C(n)x(n) + v_2(n) \end{cases}$$

$$E[v_1(n)v_1^H(n)] = \begin{cases} Q_1(n) & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

$$E[v_2(n)v_2^H(n)] = \begin{cases} Q_2(n) & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

aquestes equacions modelitzen la dinàmica del sistema i l'equació de mesura de les dades observades, les dues equacions sobre què es fonamenta el procés de filtratge. En el problema del filtratge de Kalman es pretén estimar el valor del vector de paràmetres $x(n)$ en funció d'una seqüència de valors mesurats $y(n)$. Per a dur a terme aquest procés es considera que el sistema té una dinàmica representada per la primera de les equacions. Aquesta equació representa l'evolució dels estats en funció de dos termes, un que representa la mateixa dinàmica del sistema i un altre a conseqüència d'un senyal conductor. La segona de les equacions indica la relació entre el valor que mesurem i els estats interns, així com l'efecte d'un senyal de soroll extern (soroll en la mesura). Podeu ampliar aquests conceptes en els apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.6).

El procés innovació

L'objectiu del filtratge de Kalman és trobar un mètode recursiu d'estimació que actualitzi el seu resultat en funció de les noves mesures obtingudes en el temps. Per dur a terme aquest procediment seria desitjable conèixer quina és la informació nova de cada mostra mesurada, és a dir, aquella informació que aporta algun tret diferencial respecte de la que s'havia mesurat fins l'instant anterior. La seqüència que representarà aquesta informació és el procés innovació.

$$\{y(1), y(2), \dots, y(n)\} \Leftrightarrow \{\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n)\}$$

$$\text{on } \alpha(n) = f_{n-1}(n)$$

El procés innovació es genera en funció de les dades mesurades $y(n)$ i correspon exactament a la base que trobaríem si apliquéssim el procediment de Gram Schmidt per a la generació d'una base ortogonal. Recordem que en l'aplicació d'aquest procediment, a cada variable de l'espai d'entrada se li treia la projecció sobre el subespai generat per les anteriors, de tal forma que donava una base formada per variables totalment incorrelades i ortogonals. L'avantatge del procés innovació és que la contribució de cada variable sobre l'estimació final s'aconsegueix simplement ponderant-la amb el coeficient de projecció. Aquest concepte és aplicat en el filtre de Kalman per aconseguir l'estimació recursiva del vector objectiu $x(n)$ en funció dels



nous valors mesurats. Podeu ampliar aquests conceptes en els apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.6).

Procés recursiu d'estimació del filtratge de Kalman

El gran avantatge del filtratge de Kalman és la seva implementació recursiva, que el fa apte per a implementacions sobre programari específic i en aplicacions en temps real. El procés d'estimació del filtre de Kalman consta bàsicament de dos termes totalment independents que contribueixen a realitzar l'estimació del vector $x(n)$. Les equacions que intervenen en el procediment són les següents:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n+1|\psi_n) &= \theta(n+1, n)\hat{x}(n|\psi_{n-1}) + G(n)\alpha(n) \\ G(n) &= E[x(n+1)\alpha^H(n)]\Sigma^{-1}(n) \\ \Sigma(n) &= E[\alpha(n)\alpha^H(n)]\end{aligned}$$

Les equacions anteriors sintetitzen els aspectes fonamentals del filtratge de Kalman. La informació del subespai mesurat (format per les mostres del senyal $y(n)$) està representat per

$$\psi_{n-1} = \{y(1), y(2), \dots, y(n-1)\}$$

i és la representació de la informació obtinguda en el procés de mesura fins l'instant $n-1$. Amb aquesta informació podem fer una predicció del valor del vector de mesura a l'instant $n+1$. Aquesta predicció es pot realitzar basant-nos en el model dinàmic del sistema, que porta informació sobre l'evolució dels estats. En qualsevol cas, el procediment de predicció basat en la dinàmica del sistema no té en compte les variacions degudes al senyal conductor del model. Aquestes variacions quedaran reflectides en el procés innovació, en aquella part de la informació de la mostra $y(n)$ que no era previsible en funció de les mostres anteriors. Això provoca que l'estimació s'haurà de millorar amb el terme corresponent del procés innovació, i atès que aquest és ortogonal al subespai anterior, el coeficient que hem d'aplicar serà simplement el coeficient de projecció, tal i com es pot observar en el valor de $G(n)$. Aquest coeficient no és més que el coeficient de projecció del senyal objectiu ($x(n)$) sobre el procés innovació.

En el problema del filtratge de Kalman aquest coeficient s'anomena guany de Kalman. El gran avantatge del filtre de Kalman és que aquest guany es pot calcular de forma recursiva. No entrarem en detalls sobre el procediment matemàtic del desenvolupament ja que no és l'objectiu del curs. En qualsevol cas, als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.6) podeu trobar el desenvolupament de totes aquestes equacions tot i que no és necessari conèixer-ho per aquest curs.

Algorisme del filtre de Kalman

Tot el coneixement exposat en els conceptes anteriors queda sintetitzat en l'algorisme del filtre de Kalman. Aquest algorisme representa el procediment i les equacions que



caldría implementar en un programari digital per implementar amb èxit l'algorisme. Les expressions de l'algorisme del filtre de Kalman les teniu sintetitzades als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.6).

6.3.6. Exemples comparatius

En aquest apartat analitzarem uns exemples comparatius dels diferents tipus de filtres estudiats fins al moment tot extraient conclusions dels resultats obtinguts amb simulacions sobre el MATLAB. Per fer la comparació es disposa de resultats amb quatre filtres diferents, el LMS, el RLS, l'estructura Lattice i el filtre de Kalman. Els diferents tipus de filtres han estat entrenats amb un senyal d'entrada amb diferents factors de correlació. Les gràfiques mostren resultats a mesura que s'incrementa el factor de correlació.

Dels exemples mostrats als apunts de tractament del senyal (capítol de filtres adaptatius, apartat 3.7) podem treure conclusions interessants. La més destacada és com el filtre LMS convencional es fa més lent a mesura que incrementa el factor de correlació del senyal d'entrada. Els filtres RLS i l'estructura Lattice presenten comportaments molt similars quant a temps de convergència, ja que treballen els mateixos conceptes d'ortogonalitat. La diferència és que el RLS és més robust pel que fa a l'estimació ja que realitza un promig superior, mentre que la Lattice té un comportament més sorollós. Finalment, el filtre de Kalman funciona d'una forma excel·lent si es coneixen les condicions en què es realitza l'estimació. En aquest cas, i atès que es tractava d'una simulació, és fàcil adaptar els paràmetres de simulació per aconseguir una ràpida adaptació al problema. No obstant això, el comportament del filtre de Kalman dependrà en gran mesura de l'experiència del dissenyador i del coneixement de què disposi sobre el problema a resoldre.

RESUM

En aquesta sessió hem vist els conceptes introductoris al voltant d'un dels filtres adaptatius més ràpids i robustos, tot i que també més complexos, que existeixen: el filtre de Kalman. Hem realitzat només una lleugera presa de contacte sobre el conceptes d'equació del sistema, equació de mesura o d'observació, així com el procés d'innovació, els quals serveixen de base per a la derivació de l'algorisme recursiu en què es basa el filtre.



SESSIÓ 33

- ❖ Nom: Introducció a les xarxes neuronals
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Haykin1999]
 - [Tractament2008]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem acabar d'estudiar les tècniques de filtratge adaptatiu, en concret el filtre de Kalman.

OBJECTIUS

En aquesta sessió introduïrem el concepte de xarxa neuronal com a nova eina de processament que simula el comportament del cervell humà i que pot ser d'ajuda en molts problemes de classificació tant en l'àmbit del processament de senyal com d'imatge.

CONTINGUTS

En aquesta sessió es veurà l'estructura bàsica d'una xarxa neuronal artificial i s'aprofundirà en l'element bàsic: la neurona. Es veuran les diferents funcions d'activació que pot tenir una neurona (element que dona els atributs de no linealitat a la xarxa). Finalment s'acabarà amb un resum de les diferents topologies de xarxa, de la filosofia de funcionament i de com pot una xarxa absorbir un cert coneixement.

7. Xarxes neuronals

7.1. Introducció a les xarxes neuronals

Ara estudiarem en què es fonamenta el concepte de xarxa neuronal artificial.

Què és una xarxa neuronal?

El concepte de xarxa neuronal sorgí com a resposta de l'avanç en el coneixement del cervell humà. Tal com avui dia se sap, el cervell humà es diferencia dels computadors més avançats pel seu altíssim grau de paral·lisme. Aquest es constitueix per uns 10 bilions de *neurones*, que són el principal element constituent, i el que és més important, per uns 60 trillions de *connexions sinòptiques* entre elles. Això fa que la



xarxa cerebral sigui molt eficient, donant respostes molt acurades amb el mínim cost energètic (menys de 10^{-16} Joules per operació per segon). En definitiva, el cervell humà és el resultat d'una evolució que ha perfeccionat la seva estructura per tal de solucionar de forma ràpida i eficient els problemes més immediats que poden posar en perill l'existència de l'ésser humà.

No obstant això, cal emfatitzar que el cervell sovint s'especialitza en determinades tasques, i és precisament en aquestes funcions en què dona respostes ràpides i precises. Dintre d'aquest conjunt de procediments optimitzats es troben les tasques de la percepció (visual i auditiva), del reconeixement de patrons (classificació immediata de tot allò que es veu i se sent en *classes de coneixement*) i control motor (respostes d'acció ràpides i precises a situacions en què es requereix d'una acció motora del cos). Tot això és possible pel fet que el cervell és una màquina de processament d'informació molt complexa, no lineal i, sobretot, paral·lela.

Una xarxa neuronal és un processador massivament paral·lel i format per unitats de processament simples (anomenades també *neurones*), tal que tendeix a *absorbir un cert coneixement a partir de l'experiència* i amb el propòsit d'utilitzar aquest coneixement per a algun propòsit específic. A l'igual que el cervell humà reestructura les connexions entre les seves neurones (les *connexions sinàptiques*) segons l'experiència viscuda (aprenentatge de l'entorn), una xarxa neuronal artificial es *configura* segons l'experiència d'unes certes *dades d'entrenament*, tal que aquesta acaba *absorbint* el coneixement essencial inherent en la informació d'entrada. El *coneixement* es modela com la influència de les connexions sobre la resposta final de la neurona.

- [Haykin1999] p1-p2

7.1.1. La neurona

Estudiem ara què és i quina estructura té una neurona real.

La neurona

A la figura 1 es pot observar l'estructura d'una neurona cortical que té estructura piramidal. El cos de la neurona rep els impulsos sinàptics de més de 10.000 altres neurones, i permet propagar la seva *resposta* a milers d'altres neurones receptores. La propagació dels impulsos entre neurones es fa mitjançant les *dendrites*, que són les terminacions receptores. Al *cos de la neurona*, és on es processa l'*activació* (activa o inactiva) de la neurona en qüestió. Aquesta *funció d'activació* sovint es modela com una funció *no lineal* de la contribució de totes les entrades. Una vegada la neurona s'ha activat, genera un potencial d'acció que es propaga per l'*axó* fins arribar a les terminals sinàptiques, les quals connectaran amb les dendrites d'altres neurones.

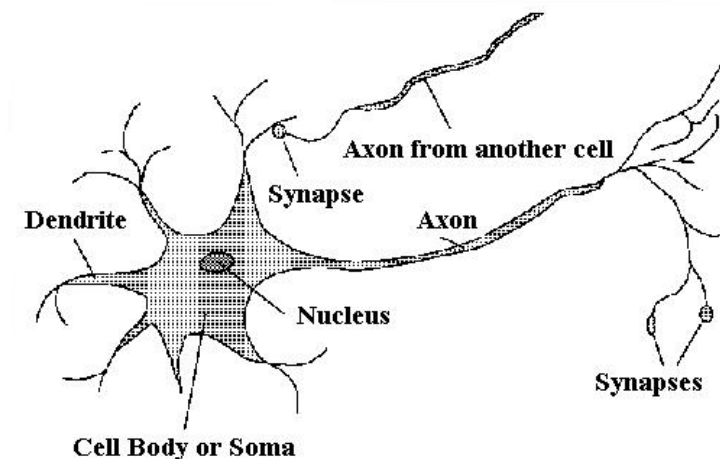


Fig. 1 Estructura d'una neurona cortical.

- [Haykin1999] p6-p10

7.1.2. Avantatges de les xarxes neuronals

Les xarxes neuronals han estat concebudes per realitzar tasques específiques dintre d'un problema de gran envergadura, és a dir, són unitats de processament que permeten donar respostes ràpides (el temps de resposta d'una xarxa neuronal és molt petit gràcies al seu alt grau de paral·lelisme) i eficaces a certs problemes.

Capacitat de generalització

En general, una de les característiques més importants és que permeten *generalitzar a partir d'exemples*. És a dir, una xarxa neuronal absorbeix un *coneixement comú*, de tots els exemples subministrats durant l'*etapa d'entrenament*, de forma que durant l'*etapa d'execució* és capaç de donar respostes correctes a estímuls que no havia vist abans.

- [Haykin1999] p2-p6

Aprenentatge a partir d'exemples

Una xarxa neuronal tracta d'adaptar els seus pesos d'interconnexió (graus de llibertat) per maximitzar la semblança entre els exemples subministrats durant l'*etapa d'entrenament*. A partir d'un conjunt d'entrenament de relacions entre certes entrades i les sortides que es desitja tenir per a cada entrada, la xarxa ha d'intentar optimitzar els pesos per fer que aquesta relació s'estableixi de la millor forma possible. Els exemples subministrats sovint s'apliquen varies vegades i en diferent ordre fins que els pesos arriben a un estat estacionari. Aquest tipus d'aprenentatge fa que l'enginyer s'oblidi de



l'estructura interna o de possibles models del problema, per utilitzar una estructura genèrica i no lineal que pot aportar solucions al problema, simplificant la seva tasca.

- [Haykin1999] p2-p6

Adaptabilitat

Una xarxa neuronal és un sistema adaptatiu, de forma que es pot reentrenar per tal de solucionar problemes diferents en situacions diferents. Aquesta propietat fa que sigui una estructura molt atractiva per a aplicacions de classificació de patrons (imatge), processament de senyal i sistemes de control, on l'entorn tingui fins i tot canvis temporals (entorn no estacionari) tal i com hem vist amb els filtres adaptatius al capítol anterior.

- [Haykin1999] p2-p6

7.1.3. Model d'una neurona

A continuació veurem el model de neurona que podem trobar en una xarxa neuronal artificial, i que està inspirat en l'estructura d'una neurona real (tot i que molt més simplificada que a la realitat).

Model d'una neurona

A la figura 2 podem veure el model no lineal, que es basa en una sèrie de senyals d'entrada x_j (per $j = 1, 2, \dots, m$), els quals influencien l'activació de la neurona k -èsima segons uns pesos w_{kj} (i que simulen les connexions sinàptiques). Aquests pesos són, de fet, els que emmagatzemen el *coneixement distribuït* que acabarà havent-hi en tota la xarxa. A continuació tenim el *node sumador* que rep la influència de totes les entrades ponderades més la contribució del terme *bias* b_k (polarització).

A continuació, la *funció d'activació* $\varphi(\cdot)$ és qui dóna una resposta normalment normalitzada dins l'interval $[0, 1]$ o bé $[-1, 1]$, i que generalment dóna respostes del tipus 1 (neurona activada) quan la suma és positiva i 0 o bé -1 (neurona desactivada) quan aquesta és negativa.

Les equacions que descriuen el comportament de la neurona són les següents:

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad y_k = \varphi(u_k + b_k)$$



El paràmetre de *bias* fa la funció de desplaçar el llindar d'activació de la neurona de 0 al valor de $-b_k$. Es pot expressar un model equivalent de neurona on el *bias* estigui integrat com una entrada més amb pes igual a 1, tal com es pot observar a la figura 3.

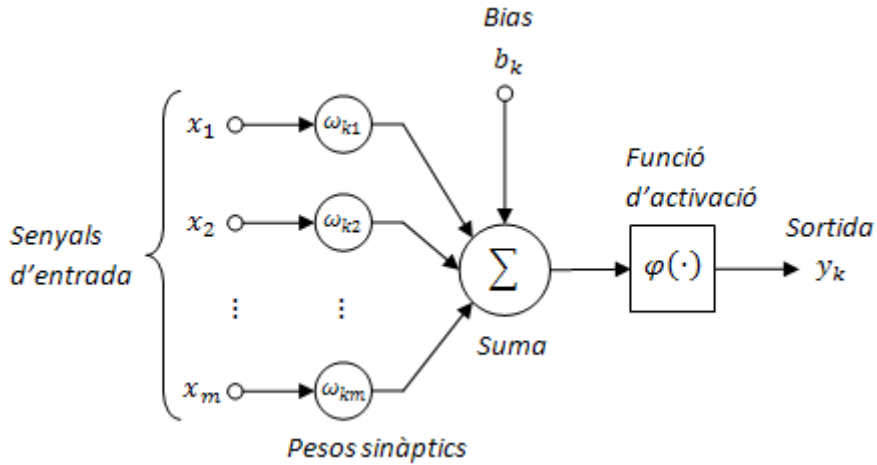


Fig. 2 Model no lineal d'una neurona

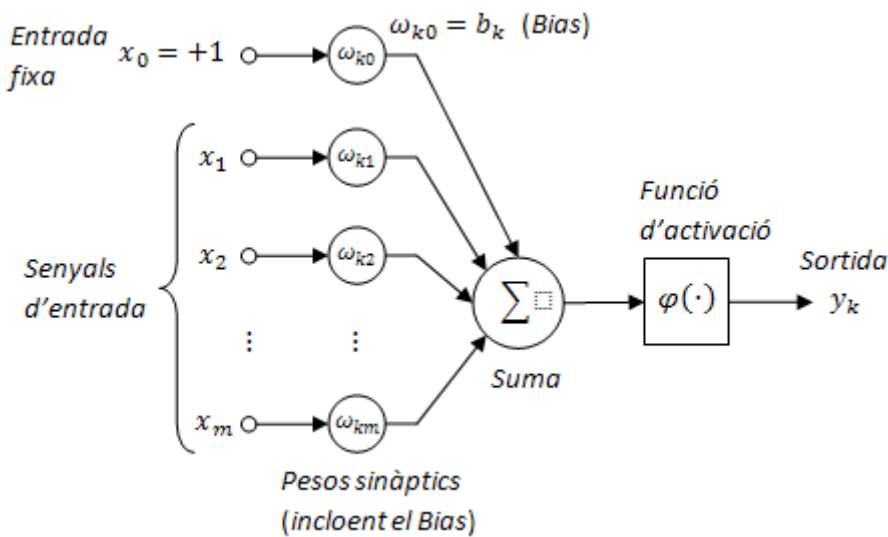


Fig. 3 Model alternatiu d'una neurona

- [Haykin1999] p10-p12

7.1.4. Tipus de funcions d'activació

Ara veurem quins tipus de funció d'activació s'utilitzen normalment.



Tipus de funció d'activació

La funció d'activació defineix el valor de la sortida de la neurona en funció del camp induït per les connexions sinàptiques amb les anteriors neurones. A la figura 4 es poden veure els tres principals tipus de funcions d'activació. La més senzilla de totes és la funció llindar (a), la qual es defineix com segueix:

$$\varphi(v_k) = \begin{cases} +1 & \text{si } v_k > 0 \\ 0 & \text{si } v_k = 0 \\ -1 & \text{si } v_k < 0 \end{cases}$$

En segon lloc tenim la funció de saturació lineal a trams (b), que es basa en donar una sortida proporcional a l'entrada només a l'interval $v_k \in [-0.5, 0.5]$, i fixar la sortida a 0 o a 1 quan l'entrada superi aquests marges, respectivament. En tercer lloc, i com a funció d'activació més utilitzada és la funció *sigmoide*, que presenta un comportament continu i derivable, el que la fa molt apropiada per a la fase d'entrenament de la xarxa. A la gràfica (c) es mostra un exemple de funció sigmoide com és:

$$\varphi(v_k) = \frac{1}{1 + e^{-av_k}}$$

per a diferents valors del paràmetre de pendent a (la derivada a l'origen és $a/4$). Per a tendint a infinit s'obté la funció llindar. Una altra possibilitat és la funció arc tangent hiperbòlica:

$$\varphi(v_k) = \tanh(v_k)$$

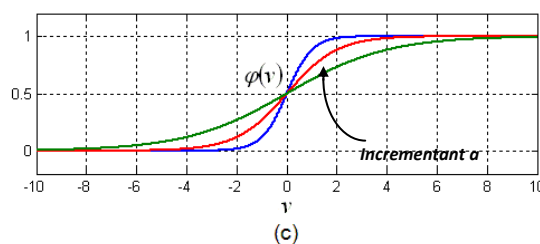
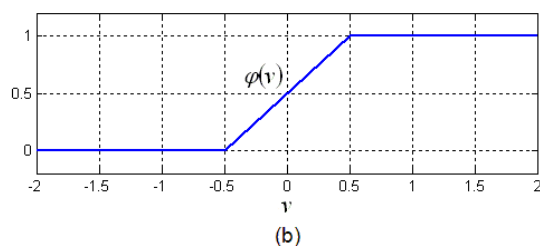
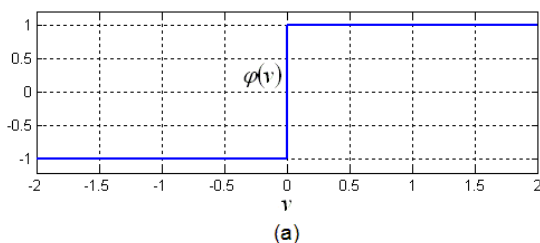


Fig. 4 Funcions d'activació



- [Haykin1999] p12-p15

7.1.5. Model estocàstic d'una neurona

Aquest és un model de neurona que, a diferència del comportament determinístic basat en una funció d'activació no lineal vist fins ara, es fonamenta en un comportament estadístic especificat per la funció d'activació.

Model estocàstic d'una neurona

Tot i que la majoria de vegades s'utilitzen els models deterministes descrits fins ara, també es pot definir un model estocàstic o probabilístic del seu comportament. En aquests casos, la resposta de la neurona té només dos estats: -1 o +1. La decisió de l'estat de la neurona es fa segons una variable aleatòria binària la distribució de la qual depèn directament de la funció d'activació. És a dir:

$$y_k = \begin{cases} +1 & \text{amb probabilitat } P(v_k) \\ -1 & \text{amb probabilitat } 1 - P(v_k) \end{cases}$$

on, per exemple, si s'utilitza la funció sigmoide:

$$P(v_k) = \frac{1}{1 + e^{-v_k/T}}$$

on T és la *pseudotemperatura* que controla la incertesa de l'activació. Si T tendeix a 0 el comportament de la neurona tendeix a ser determinista, i sempre activada.

- [Haykin1999] p15

7.1.6. Arquitectures de xarxes neuronals

La capacitat d'abstracció o d'assimilació del coneixement així com la forma de l'aprenentatge d'una xarxa neuronal està íntimament lligat a l'estructura i disposició de les seves neurones. Bàsicament es distingeixen tres tipus d'estructures o arquitectures de xarxes neuronals.

Xarxes de capa única sense realimentacions

En una xarxa neuronal, les neurones s'agrupen en forma d'*etapes*, en cadascuna de les quals cada neurona actua paral·lelament amb les seves veïnes, rebent informació



de totes les sortides de les neurones de l'*etapa d'entrada*, i proporcionant informació cap a una de les neurones de l'*etapa de sortida*, tal i com es pot veure a la figura 5.

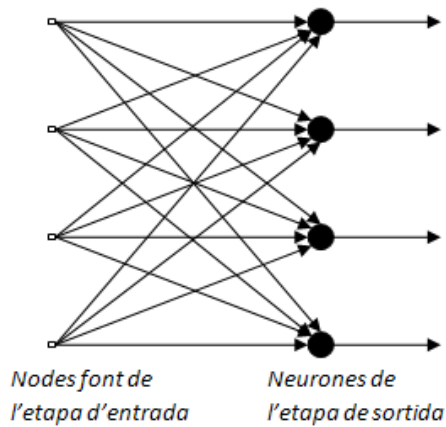


Fig.5 Xarxa d'una capa sense realimentacions

- [Haykin1999] p21-p23

Xarxes multicapa sense realimentacions

Sovint es fan servir xarxes amb dues o més capes de neurones connectades entre si. Excepte l'última capa, que proporciona la resposta de la xarxa, les altres capes reben el nom de *capes ocultes*, ja que les seves sortides no són directament visibles a la sortida global. Les diferents etapes poden tenir diferent nombre de neurones, com es pot veure en la xarxa de dues etapes de la figura 6 (una sola capa oculta). Es diu que és una xarxa neuronal 10-4-2. Aquest tipus de xarxes, permeten un coneixement molt més ampli que les xarxes de capa única, poden extraure estadístiques d'ordre elevat dels conjunts de dades d'entrenament. En general es permet que entre capes adjacents la connectivitat sigui total, tot i que es poden definir estructures *parcialment connectades*, limitant el nombre de connexions.

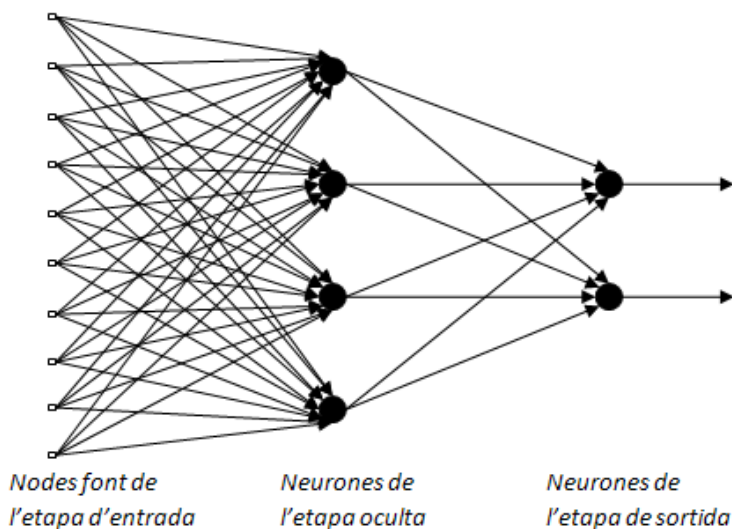




Fig. 6 Xarxa multicapa amb una capa oculta, sense realimentació i connectivitat total.

- [Haykin1999] p21-p23

Xarxes recurrents

La diferència principal entre una xarxa recurrent i una altra sense realimentacions és que en la primera hi ha un o més camins de realimentació, de forma que etapes posteriors alimenten les seves sortides cap a etapes anteriors, formant bucles tancats amb registres de desplaçament, tal i com es pot observar a la figura 7.

La presència de realimentacions en una xarxa neuronal artificial permet augmentar la capacitat d'aprenentatge i prestacions d'una xarxa .

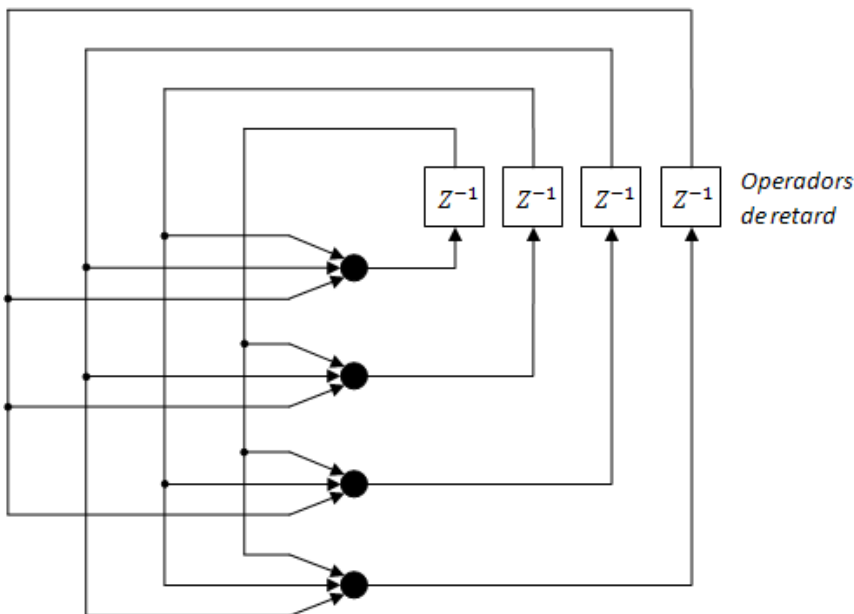


Fig. 7 Exemple de xarxa recurrent

- [Haykin1999] p21-p23

7.1.7. Representació i assimilació del coneixement

Abans de definir els punts clau en el procés d'assimilació de coneixement per part d'una xarxa neuronal, cal recordar una definició de coneixement adient per al nostre propòsit: "Coneixement és informació emmagatzemada o models que una persona o màquina utilitza per interpretar, predir o respondre a determinats estímuls del món extern" (Fischler i Firschein 1987).

Posarem un exemple, per ser més aclaridors. Pensem en un sistema de reconeixement de dígit decimal escrits a mà. És aquest un clar exemple de classificació de patrons aplicat al tractament digital de la imatge. Abans de tot cal



saber quina és la informació mínima necessària que pot portar a la identificació del dígit (informació explícita), en el nostre cas pot ser una imatge digitalitzada en blanc i negre, i amb uns certs valors de resolució. L'entrada a la xarxa seran els valors dels píxels de la imatge, que valdran 1 o 0 segons si el píxel és blanc o negre. La sortida de la xarxa seran 10 neurones, cadascuna de les quals s'activarà segons si es reconeix algun dels 10 dígits decimals.

Procés d'aprenentatge

El *procés d'aprenentatge* es basarà a mostrar a la xarxa parells d'imatges reals conjuntament amb el símbol real que representen, en situacions reals. L'*algoritme d'aprenentatge* és el procés mitjançant el qual s'ajusten els pesos w_{kj} per tal d'imitar la *resposta desitjada* als *patrons* subministrats durant l'entrenament. Aquest algoritme es basarà en una *funció de cost* que dependrà dels pesos de la xarxa, i el mínim absolut de la qual serà el punt que proporcionarà un comportament més semblant al desitjat segons l'entrenament proporcionat. Aquest procés d'optimització que és l'aprenentatge és un procediment adaptatiu, i es pot interpretar com un mètode numèric de minimització de funcions no lineals.

- [Haykin1999] p23-p28

Verificació i generalització

Passada l'etapa d'entrenament, es procedeix a comprovar les prestacions de la xarxa amb nous patrons d'entrada (no entrats durant el període d'entrenament), i verificant que la resposta de la xarxa és prou adequada. En cas contrari, això pot implicar modificar l'arquitectura de la xarxa, afegint neurones a les capes existents, afegint noves capes o fins i tot canviant la filosofia d'entrenament. En cas que la resposta de la xarxa sigui satisfactòria, es diu que aquesta ha *generalitzat* el coneixement dels exemples, i ha extrapolat gràcies al model après la resposta a entrades encara no vistes per la xarxa fins ara. En l'exemple proposat, és possible que certes imatges puguin arribar a confondre totalment fins i tot a una persona. En aquests casos, sovint és convenient ensenyar per negació, és a dir, donar contraexemples de què no s'ha de classificar (p.ex. no activar cap neurona). Això permet doncs augmentar la base de coneixement de la xarxa o fer la seva capacitat de resposta més robusta front a situacions extraordinàries.

- [Haykin1999] p23-p28

RESUM

En aquesta sessió hem introduït els conceptes més importants al voltant de les xarxes neuronals artificials, entitats de processament no lineal que són una altra de les eines fonamentals en el processament digital del senyal.



SESSIÓ 34

- ❖ Nom: Perceptrons
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Haykin1999]
 - [Tractament2008]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem introduir el concepte de xarxa neuronal, així com les diferents característiques i topologies que podem trobar. També vàrem incidir en quin tipus de problema permeten afrontar, i que bàsicament són problemes de classificació de coneixement.

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem les xarxes sense realimentació anomenades perceptrons. Constitueixen una eina per realitzar la classificació de patrons d'entrada en classes. El concepte de classe es pot aplicar a perceptrons de capa única, el que permet afrontar problemes linealment separables. D'altra banda, els perceptrons multicapa són capaços de classificar problemes de classificació més complexos tal que l'espai de partició estigui definit per una funció qualsevol.

7.2. Els perceptrons

7.2.1. Perceptrons de capa única

Comencem per analitzar el comportament d'una sola neurona, i esbrinar quin tipus de problemes pot solucionar. Treballarem amb el model de *McCulloch-Pitts* en el qual la funció d'activació és la funció signe. Com ja s'ha dit abans, una neurona parteix d'unes entrades que indicarem en forma de vector columna $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ a les quals pondera segons unes *connexions sinàptiques* amb un vector de pesos $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, les suma juntament amb un coeficient de *bias* b i aplica una funció no lineal anomenada *funció d'activació* $\varphi(\cdot) = \text{sgn}(\cdot)$. Segons això, la sortida de la neurona serà:

$$v = \text{sgn}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b)$$

Més genèricament, es pot incorporar el valor del *bias* com un pes sinàptic més, fent que la seva entrada corresponent sigui 1, és a dir:

$$v = \text{sgn}(\mathbf{w}^T \mathbf{x})$$



on $\mathbf{x} = [1, x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ i $\mathbf{w} = [b, w_1, w_2, \dots, w_m]^T$.

Regions de classificació

El propòsit del perceptró de capa única és classificar els possibles vectors d'entrada \mathbf{x} en dues categories $\{-1, +1\}$. Per fer un estudi de les dues *regions de classificació* cal apropar-se al límit de decisió de la funció no lineal, és a dir, on l'argument de la funció es fa zero. Per ser més il·lustratiu, treballarem en el cas que $m = 2$.

$$\sum_{j=1}^m w_j x_j + b = \overset{m=2}{\downarrow} w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = 0$$

Geomètricament això té una interpretació força clara. El perceptró pot classificar les dades d'entrada segons una recta dins el pla de representació de les dades.

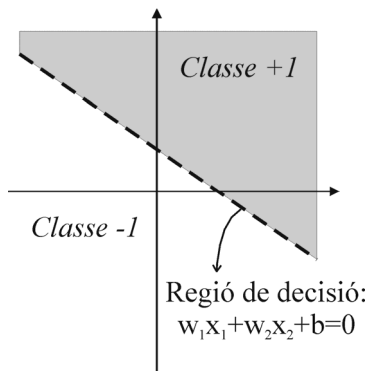


Fig. 1 Regió de classificació d'una neurona dividida per un hiperplà (línia en el cas bidimensional)

Aprenentatge supervisat

La forma en què un perceptró de capa única pot aprendre és aplicant un *algorisme d'aprenentatge supervisat*. Donat un *conjunt de dades d'entrenament* $\{\mathbf{x}(n) \rightarrow d(n), \text{ per } 0 \leq n \leq L-1\}$, on $d(n) \in \{-1, +1\}$, aquestes dades proporcionen una base de coneixement de com s'ha de comportar la xarxa. És una guia que permetrà adaptar les *connexions sinàptiques* al seu valor òptim, sempre que el problema de classificació sigui *linealment separable*, i el conjunt d'entrenament sigui prou gran com perquè la xarxa *generalitzi el problema* de cara a nous casos no vistos fins al moment. La forma estàndard d'aplicar l'aprenentatge en aquest cas és fent servir l'algorisme LMS. L'equació d'aprenentatge seria la següent:

1.- *Inicialització*: $\mathbf{w}^{(-1)} = \mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$

2.- *Iteració*: $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu[d(n) - y(n)]\mathbf{x}(n)$ per $0 \leq n \leq L-1$



La constant d'adaptació μ juga un paper important en la *velocitat d'aprenentatge* així com en l'estabilitat del procés. Per assegurar l'estabilitat és convenient que $0 < \mu \leq 1$. Per fer l'adaptació més estable convé escollir valors propers a zero, tot i que això pot fer massa lent l'aprenentatge.

7.2.2. Perceptrons multicapa

Un perceptró multicapa és una xarxa neuronal sense realimentacions amb dos o més capes de neurones.

Estructura

A la figura 2 es pot veure un exemple de xarxa amb dues capes de neurones. La capa d'entrada és a la que se li entra el *vector de dades d'entrada* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$. Les dades d'aquest vector provoquen una certa sortida que serà el vector de dades d'entrada per la següent etapa, i així successivament.

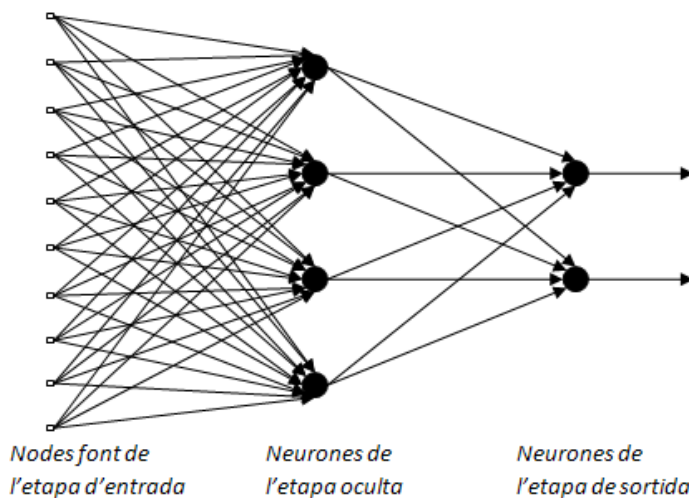


Fig. 2 Exemple de perceptró multicapa amb una sola capa oculta

Capacitat de classificació

Un perceptró amb dues capes de neurones és capaç d'afrontar qualsevol problema de classificació per molt complicat que sigui. Això sí, depenent del problema, la solució pot implicar el tenir capes amb més o menys neurones. Això es pot demostrar intuïtivament en un exemple senzill de dimensió 2. Suposem un espai de dades de dues coordenades (x_1, x_2) .

Hem vist com un perceptró d'una capa era capaç de classificar l'espai 2D en dues regions separades per un pla (un hiperplà de dimensió m , per a ser més genèric). Dins aquest espai podem crear certes particions de classes. Suposem que establim



dues classes corresponent a les regions de la figura 3. La regió marcada com a classe +1 veiem que es correspon amb la intersecció de tres regions de les tres neurones d'entrada. Per tant, el problema es pot solucionar linealitzant la forma de la partició que es vulgui amb tantes neurones com siguin necessàries. En aquest cas, com només hi ha dues classes, amb una sola neurona de sortida que prengui la decisió final n'hi ha prou. En general, podríem establir tantes classes com fossin necessàries. En general, amb M neurones a la capa de sortida podríem classificar 2^M subconjunts o classes diferents.

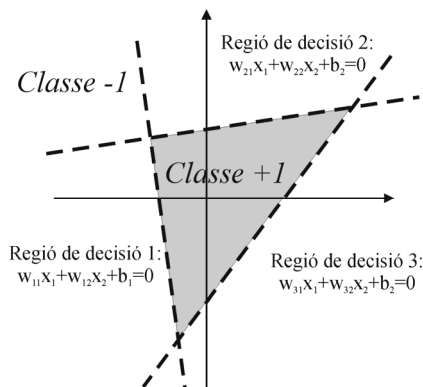


Fig. 3 Regions de classificació per a un perceptró amb dues entrades (x_1, x_2) i dues capes (capa oculta d'entrada amb tres neurones i capa de sortida amb una neurona)

Funció d'activació

A diferència del perceptró de capa única, en aquest cas la *funció d'activació* és una funció contínua i derivable. Aquesta és una condició indispensable per poder realitzar l'entrenament de la xarxa. Per exemple es pot utilitzar una sigmoide,

$$y_k = \frac{1}{1 + e^{-v_k}}$$

on $v_k = \sum_{j=0}^m w_{kj} x_j$, w_{kj} són els pesos de la neurona k , $w_{k0} = b_k$ és el seu terme de *bias* o *polarització*.

Entrenament d'un perceptró multicapa

L'algorisme que permet entrenar el comportament d'un perceptró multicapa rep el nom de *back-propagation*. La filosofia d'aquest procés d'aprenentatge per fixar els pesos de totes les neurones de la xarxa es basa també en un aprenentatge supervisat, en què se li mostren parells d'entrades i sortides desitjades (el conjunt d'entrenament).

Es tracta d'un aprenentatge supervisat, per tant cal disposar d'un conjunt de dades d'entrenament $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{o}(n)\}$ per $0 \leq n \leq L-1$, i on $\mathbf{x}(n)$ és el vector de dades d'entrada i $\mathbf{o}(n)$ és el vector de dades de sortida (vector binari). L'objectiu d'aquest algorisme es



basa a minimitzar la distància euclidiana promig entre els patrons desitjats de sortida i els patrons de sortida reals que la xarxa doni per als patrons d'entrada del conjunt d'entrenament.

El procés es divideix en dues etapes:

1.- *Càlcul de la sortida*: s'aplica el patró de dades d'entrada (vector), i es van propagant totes les sortides de les neurones d'una capa a la següent, fins arribar a la sortida de la xarxa. Durant aquest pas, els pesos de la xarxa romanen inalterats.

2.- *Retropropagació de l'error*: A partir de l'error calculat com la diferència de la resposta de la xarxa amb la resposta desitjada pel patró de dades d'entrada, aquest es va propagant cap enrere (d'aquí el nom de *back-propagation*). En cada capa es calcula l'error corresponent que permet ajustar els pesos de les neurones que hi intervenen, en el sentit de minimitzar l'error estadístic de totes les dades del conjunt d'entrenament. Aquesta etapa segueix una filosofia semblant a l'algorisme LMS, però amb l'afegit de la no-linealitat que hi ha entre una capa i la següent. Per salvar aquesta no-linealitat cal conèixer la primera derivada de la funció d'activació de les neurones $\phi'(v)$, i es basa en el principi que si es comet un cert error $\Delta y = d - y$ a la sortida, aquest error es pot propagar a l'entrada de la funció amb $\Delta v \approx \Delta y \phi'(y)$. Finalment, els ajustos dels pesos de les neurones es fa tenint en compte aquest error a la sortida de cadascuna.

Mostrem, només a títol de curiositat, l'equació per a la iteració dels pesos sinàptics, una vegada s'han calculat tots els errors de sortida de les neurones:

$$w_{kj}^{(l)}(n+1) = w_{kj}^{(l)}(n) + \alpha w_{kj}^{(l)}(n-1) + \mu e_k^{(l)}(n) y_k^{(l-1)}(n)$$

on els superíndex indiquen a quina capa ens trobem, i α i μ són les constants de *moment* i *velocitat d'aprenentatge respectivament*.

Inicialització

La inicialització dels pesos de la xarxa s'acostuma a fer aleatòria, però tal que en promig tots els patrons del conjunt d'entrenament facin que les funcions d'activació es trobin entre la transició entre la zona lineal i la zona saturada.

Ordre de presentació dels exemples d'entrenament

L'entrenament de la xarxa implica fer un escombrat de tots els exemples d'entrenament diverses vegades. Cada vegada que s'han presentat tots els exemples rep el nom d'*epoch*. Per tal d'afavorir el procés d'aprenentatge de la xarxa, és important que en cada *epoch* la xarxa vegi l'ordre dels exemples alterats, ja que d'aquesta forma no aprèn la seqüencialitat que podria haver-hi en un ordre determinat, cosa que ajuda a la *generalització* de la xarxa. D'altra banda, els paràmetres de velocitat d'adaptació en la iteració dels pesos de les neurones s'acostumen a variar en el procés d'entrenament, començant per valors més alts i acabant amb valors petits.



Això permet evitar que la xarxa caigui ràpidament en *mínims locals* i evolucioni cap al *mínim absolut* de l'error promig de sortida.

RESUM

En aquesta sessió hem vist les primeres xarxes neuronals que es van estudiar i encara avui s'utilitzen per resoldre problemes de classificació: els perceptrons.



SESSIÓ 35

- ❖ Nom: Xarxes de funcions de base radial (RBF).
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Haykin1999]
 - [Tractament2008]

PRECEDENTS

Fins ara hem vist la teoria bàsica de les xarxes neuronals anomenades perceptrons, tant d'una com de diverses capes.

OBJECTIUS

En aquesta sessió veurem una nova estructura de xarxes neuronals, anomenades xarxes de funcions de base radial o RBFN (*Radial Basis Function Networks*).

CONTINGUTS

En aquesta sessió estudiarem les xarxes de funcions de base radial. Es tracta d'una estructura de xarxa neuronal diferent de la vista fins ara, tot i que tant les RBFN com els perceptrons permeten abordar problemes de la mateixa complexitat.

7.3. Les xarxes de funcions de base radial (RBF)

Una xarxa de funcions radials es basa en el següent postulat:

Postulat

Un problema de classificació complex es pot reduir a un problema linealment separable més fàcilment si es trasllada a un espai de dimensionalitat superior que no pas en un d'inferior.

Això és en el que es basa una xarxa de funcions radials o RBFN (*Radial Basis Function Networks*). La idea és traslladar el problema, no linealment separable, a un nou espai de dimensionalitat major que la d'entrada (anomenat *espai ocult*) per tal de reduir-ho a un problema linealment separable (per exemple, amb una simple neurona a la capa de sortida). A més a més, aquesta migració cap a un espai més genèric es fa mitjançant un mapatge no lineal, basat en distàncies a uns certs centroides que representen les dades d'entrada.



7.3.1 Estructura

Ara estudiarem l'estructura d'una xarxa de funcions de base radial.

Estructura

L'estructura d'una xarxa radial la podem veure a la figura 1. Com podem veure tenim una primera capa de neurones (oculta), però que a diferència de les neurones vistes fins ara, aquestes es caracteritzen per una funció no lineal que depèn de totes les variables d'entrada (a diferència del que hem vist fins ara en els perceptrons). Aquesta primera capa té la funció de fer el *mapatge* del vector d'entrada de dimensió m , a un altre vector de dimensió $m_1 > m$ (generalment). El vector de sortida de la capa oculta serveix com a entrada a l'única neurona de la capa de sortida. Aquesta segona capa és lineal, de forma que no hi ha funció d'activació. En aquest exemple només hi ha una neurona a la capa de sortida, però en general poden haver-hi N neurones.

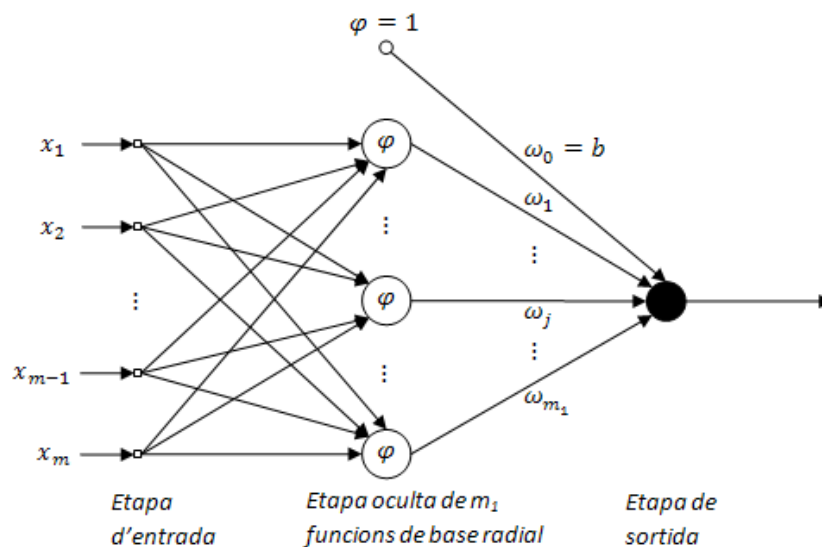


Fig. 1 Estructura d'una xarxa de funcions radials

Generalment el nombre de neurones de la capa oculta m_1 és inferior al nombre d'exemples utilitzats en l'entrenament.

7.3.2. Funcions radials i sortida final

Funcions radials

La sortida d'una neurona de l'etapa oculta és:

$$y_k = e^{-\|x-c_k\|^2} = e^{-\sum_{j=1}^m (x_j - c_{kj})^2}$$



Es tracta d'una *funció radial* que mesura la distància del vector d'entrada \mathbf{x} al *centroide* que representa la neurona k -èsima. Aquests centroides són també paràmetres a optimitzar per la xarxa, en funció del conjunt d'entrenament subministrat.

La idea és que el conjunt de *centroides* format per $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m\}$ sigui un conjunt *representatiu* de l'espai de dades d'entrada. És sobre les mesures de les distàncies dels punts d'entrada a aquests centroides que es construeix la variable decisional final, la qual estableix un grau de pertinença a les classes establertes en l'entrenament i per a la configuració de la xarxa.

Sortida final

La sortida final de la xarxa es pot expressar com una combinació lineal:

$$Out = \sum_{k=0}^{m_1} w_k y_k$$

on $w_0 = b$ és el terme de polarització i $y_0 = +1$.

Aquest cas seria per poder realitzar una classificació en dues classes ξ_1 i ξ_2 .

7.3.3. Aprenentatge

Aprenentatge

L'etapa d'aprenentatge o entrenament de la xarxa es basa, igual que en el cas dels perceptrons, en un conjunt de dades d'entrenament, les quals ens ajudaran a l'ajust dels paràmetres o graus de llibertat de la xarxa: els *centroides* de l'etapa oculta i els *pesos sinàptics* de la neurona de sortida. Aquest procediment no es detalla, ja que no és necessari un aprofundiment tant exhaustiu en aquestes sessions.

7.3.4. Comparativa perceptrons vs. RBFN

Comparativa perceptrons vs. RBFN

Tant els perceptrons multicapa com les xarxes de funcions radials són exemples de xarxes neuronals multicapa sense realimentacions. Totes dues xarxes són, en general, capaces d'afrontar el mateix tipus de problemes. No obstant això, en certes situacions, pot ser millor escollir entre una o altra per criteris d'apropiació al context del problema. D'aquesta manera, és possible trobar una solució amb una o altra filosofia que tingui el



mínim cost de realització. Ara comentarem les principals diferències entre ambdós tipus de xarxes:

- 1.- Generalment les RBFN tenen una única etapa oculta, mentre que els perceptrons poden tenir-ne una o més.
- 2.- Les neurones de diferents capes de la RBFN no comparteixen la mateixa estructura, ja que estan concebudes per realitzar un paper clarament diferenciat.
- 3.- La capa oculta d'una RBFN és no lineal, mentre que l'etapa de sortida és lineal. Els perceptrons acostumen a tenir totes les neurones amb funcions d'activació no lineals.
- 4.- Mentre la funció d'activació d'una neurona d'un perceptró es calcula a partir d'un *producte escalar* entre el vector d'entrada i un vector de connexions sinàptiques, en el cas de les RBFNs es calcula una *distància euclidiana* entre el vector d'entrada i el un de pesos.
- 5.- Els perceptrons multicapa es diu que realitzen aproximacions *globals* de mapats entrada-sortida no lineals, mentre que les xarxes de funcions radials construeixen aproximacions locals d'aquests mapats basant-se en funcions Gaussians.

La utilitat principal d'aquest tipus de xarxes es basa a donar una sortida interpolada linealment segons els centroides que ha après la xarxa. Aquesta interpolació s'encarrega de fer-la la capa de sortida, mentre que la primera capa tracta d'aprendre els cúmuls de senyal on hi ha major probabilitat (segons els patrons introduïts a l'entrenament). Per tant, el resultat pot ser vist com una aproximació pels patrons de classificació de l'espai d'entrada apresos per la xarxa (centroides), amb què la funció de la xarxa radial és, en principi, diferent de la d'un perceptró. Els perceptrons, recordem que s'enfoquen més aviat a tasques de classificació/partició de l'espai d'entrada.

RESUM

En aquesta sessió hem introduït el concepte de xarxes de funcions de base radial.



SESSIÓ 36

- ❖ Nom: Els mapes autoorganitzatius
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1999]

PRECEDENTS

A l'anterior sessió vàrem veure el segon tipus de xarxes neuronals artificials: les xarxes de funcions de base radial (RBFN).

OBJECTIUS

En aquesta sessió estudiarem breument les característiques fonamentals dels mapes autoorganitzatius o xarxes de Kohonen. Aquestes xarxes neuronals tenen unes característiques que les fan útils en alguns problemes interessants com ara el problema del viatjant on es determina la ruta òptima per fer un recorregut entre diferents ciutats.

CONTINGUTS

En aquesta sessió veurem els mapes autoorganitzatius o xarxes de Kohonen.

7.4. Els mapes autoorganitzatius

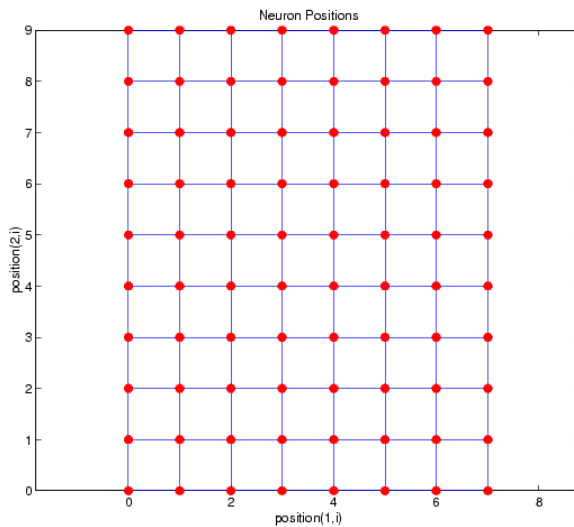
En aquest punt veurem una introducció als mapes autoorganitzatius i a la seva aplicació dintre del camp de les xarxes neuronals. Un mapa autoorganitzatiu és un tipus de xarxa neuronal competitiva on les neurones segueixen una determinada llei de veïnatge. Això vol dir que cada neurona de la xarxa representa una informació del vector de l'espai d'entrada així com de la seva relació amb altres vectors que s'hagin fet servir en l'entrenament. La característica distintiva d'un mapa autoorganitzatiu respecte d'una xarxa purament competitiva és que a més de representar la distribució de vectors d'entrada és també capaç de representar la seva topologia.



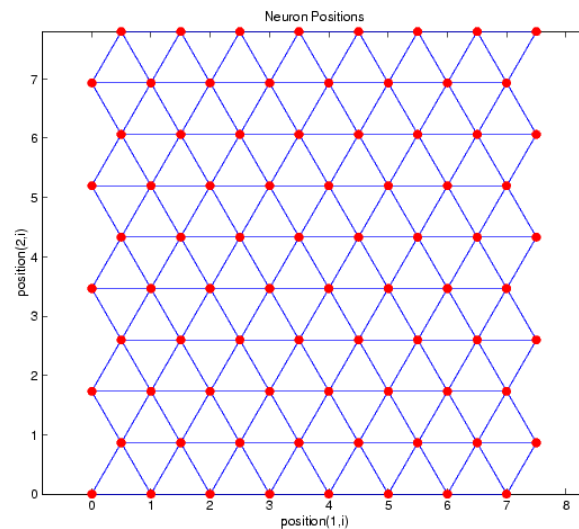
7.4.1 Topologies

Topologies

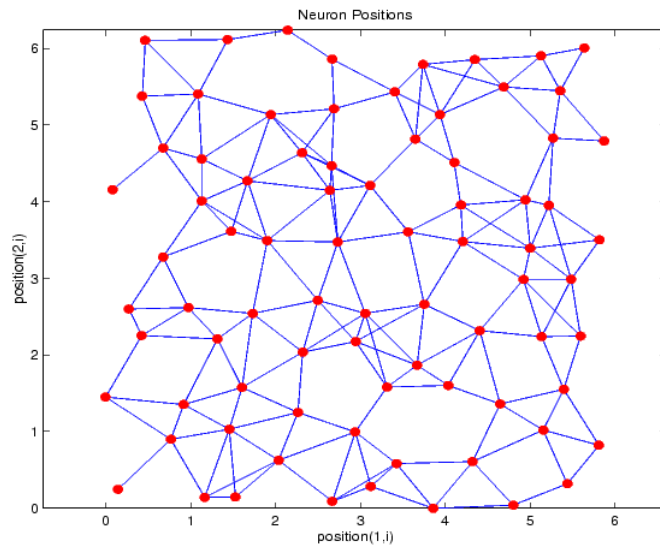
Els mapes autoorganitzats segueixen una topologia definida pel dissenyador que intentarem que s'ajusti el màxim possible a la topologia de les dades que volem entrenar. En aquest apartat veurem algunes de les possibles topologies que es poden fer servir en aquest tipus de xarxes neuronals.



en aquesta gràfica podem observar una estructura de topologia en forma de graella.



En aquesta es pot observar una topologia hexagonal.



i finalment, en aquesta podem observar una topologia aleatòria. Les diferents topologies defineixen la relació de veïnatge d'una neurona amb la que tenen al costat i serà fonamental definir aquesta relació de forma adequada per poder assolir bones prestacions en el problema que es vol resoldre amb el mapa autoorganitzatiu.

7.4.2. Distància entre neurones

Distància entre neurones

Un aspecte fonamental per acabar de definir la relació entre neurones és el concepte de distància. La topologia de la xarxa defineix la relació de veïnatge, és a dir, la relació de dependència entre una neurona i les que es troben al seu voltant. No obstant això, en cap moment defineix la magnitud del lligam establert. Els mapes autoorganitzatius han de definir una funció per definir distàncies entre neurones, i aquesta funció serà la que determinarà quina és la força amb què una neurona interactua amb el seu entorn.

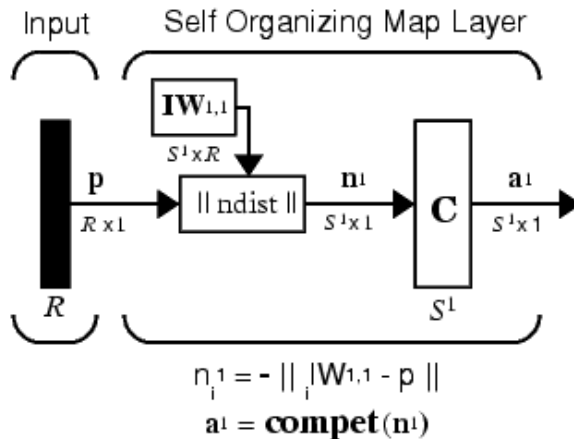
Existeixen diferents criteris de mesura de distàncies. El més natural podria ser la distància euclidiana, és a dir, la distància real que hi ha entre dues neurones situades en un pla. No obstant això, es poden definir altres criteris de distància com ara *distància d'enllaç* definida com el nombre de salts que hem de fer en la topologia per arribar d'una distància a altre. Les immediatament properes estaran a distància 1, les següents a distància 2 i així successivament. O finalment podríem parlar de la distància de Manhattan definida segons $\sum |\bar{x} - \bar{y}|$.



7.4.3. Arquitectura

Arquitectura

Un mapa autoorganitzatiu presenta una arquitectura com la mostrada a la següent figura



Com es pot observar en el dibuix no és més que una xarxa competitiva, ja que el resultat de sortida és un valor a 1 per la neurona guanyadora i zero per tota la resta. No obstant això, la gran diferència respecte de les xarxes competitives està en el procediment d'aprenentatge.

7.4.4. Entrenament

Entrenament

Un procediment important com ja s'ha vist en altres exemples és l'entrenament de la xarxa neuronal. Els mapes autoorganitzatius o mapes de Kohonen són xarxes que consten d'una xarxa competitiva però en què també intervenen criteris de veïnatge.

L'entrenament del mapa autoorganitzatiu comença detectant la neurona guanyadora i aplicant una modificació de la seva posició en l'espai seguint la direcció de les dades d'entrada. La gran diferència respecte una xarxa competitiva pura és que en aquest procediment d'entrenament també es modifica la posició de les neurones veïnes de forma inversament proporcional a la distància a què aquestes es troben. És a dir, si la neurona guanyadora s'ha de moure en una direcció determinada, aquesta tibarà de les que es troben en el seu entorn. La força amb què desplaçarà les neurones veïnes dependrà de la distància a què es trobin de la guanyadora.

Aquest concepte es pot explicar també dient que el procés d'entrenament d'un mapa autoorganitzatiu consta de dues forces, la força externa condicionada per les dades



d'entrada i la força interna de la xarxa condicionada pel mapa de veïnatge i el concepte de distància definit.

El procés d'entrenament es divideix normalment en dues etapes:

1.- La primera etapa es coneix com etapa organitzativa en què la xarxa simplement distribueix les neurones en l'espai seguint l'estructura de la topologia definida.

2.- La segona etapa és la de sintonització, on les neurones s'acaben d'ajustar d'una forma més fina per minimitzar la funció de cost a les dades d'entrada.

RESUM

En aquesta sessió hem introduït alguns conceptes al voltant de les xarxes neuronals de Kohonen o mapes autoorganitzatius.





SESSIÓ 37

- ❖ Nom: Les xarxes LVQ
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1999]

OBJECTIUS

En aquesta sessió presentarem les xarxes neuronals LVQ (Learning Vector Quantization). Aquest tipus de xarxes tenen fonaments similars però hi ha lleugeres diferències que cal estudiar en detall per comprendre la utilitat de les xarxes LVQ.

CONTINGUTS

7.5. Les xarxes LVQ

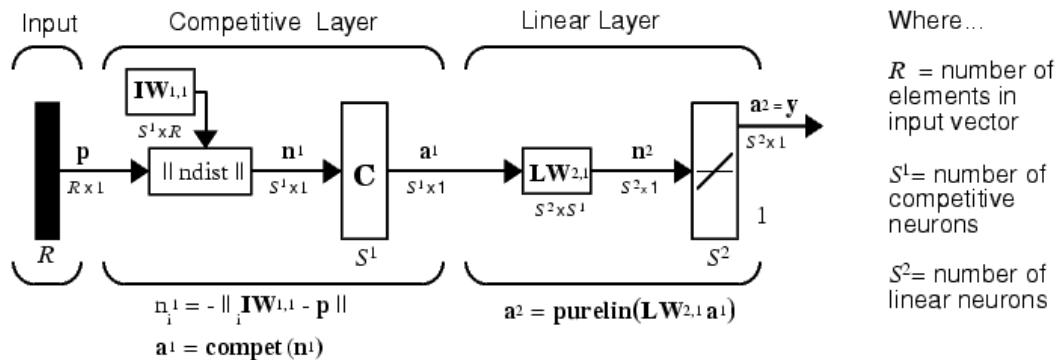
Les xarxes LVQ són xarxes neuronals amb unes prestacions molt bones com a sistemes classificadors. El gran potencial de les xarxes LVQ és que poden resoldre problemes que no siguin linealment separables d'una forma senzilla, cosa que no es podia realitzar amb els perceptrons.

Les xarxes LVQ tenen un potencial enorme com a sistemes classificadors, ja que no presenten cap problema per separar i identificar vectors corresponents a diferents classes si s'ha fet l'entrenament correcte.

7.5.1 Arquitectura

Arquitectura

A la següent figura podem observar l'arquitectura d'una xarxa LVQ



es pot observar a la gràfica que la xarxa LVQ consta de dues etapes, una primera etapa competitiva en què es fa una preclassificació de les dades d'entrada, i posteriorment una etapa lineal que genera el valor resultant de la classe a què pertany el vector d'entrada.

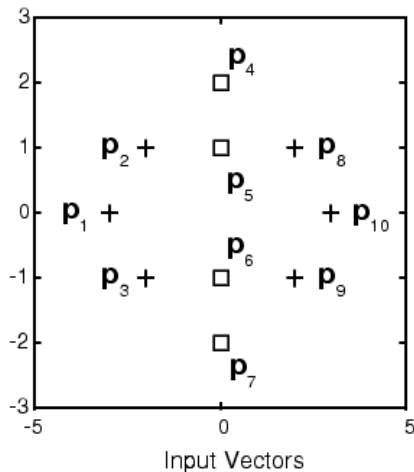
La funció de la xarxa competitiva és fer una partició de l'espai d'entrada per tal de dividir-lo en subclasses. Aquestes subclasses es generaran segons una partició de l'espai d'entrada. Finalment serà la xarxa lineal la que donarà el resultat de la classe objectiu a la que realment pertany l'element d'entrada.

7.5.2. Disseny de la xarxa neuronal

En aquest apartat tractarem el problema del disseny de la xarxa neuronal. Evidentment, el nombre de neurones internes de cada una de les capes dependrà en gran mesura del problema de classificació que volem tractar. Per aclarir més tots els conceptes relacionats amb aquest apartat considerarem un problema concret de classificació.

Considerem que volem classificar els següents punts de l'espai (cas de dimensió 2):
 $P = \{(-3,0), (-2,1), (-2,-1), (0,2), (0,1), (0,-1), (0,-2), (2,1), (2,-1), (3,0)\}$
 en les classes definides pel vector $T_c = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1\}$ respectivament.

El problema es pot representar segons el següent gràfic:



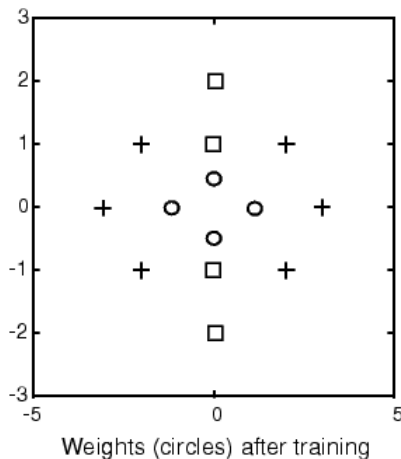


els punts corresponent a creus representen els de la classe 1, mentre que els punts amb quadrats representen els de la classe 2. Evidentment aquest problema no és linealment separable i seria complicat tractar-lo amb un perceptró. La xarxa LVQ fa una primera preclassificació dels vectors d'entrada en les subclasses definides en el gràfic.

D'aquesta gràfica es poden treure les següents conclusions. El nombre de neurones que necessitem a la primera etapa és de 4 per poder fer la divisió correcta de l'espai d'entrada. El procés d'entrenament les situarà de forma adequada per fer la partició segons un criteri de distància. La xarxa neuronal lineal s'encarregarà de determinar a quina classe de les dues possibles pertany el vector d'entrada.

7.5.3. Entrenament

L'entrenament de la xarxa competitiva i de la xarxa lineal es fa seguint els criteris típics d'entrenament d'aquest tipus de xarxes. La primera etapa simplement actuarà com a classificadora i les neurones que generaran les subclasses simplement. En la següent gràfica podem veure com evoluciona l'entrenament de la xarxa competitiva de la primera etapa.



Com es pot observar, després de l'etapa d'entrenament, les neurones de la xarxa competitiva com aquestes van tendint cap a les posicions on es troben les diferents classes fent la separació prèvia en subclasses. Finalment serà la xarxa lineal la que acabarà de classificar les diferents subclasses en les dues classes objectiu associant a la neurona guanyadora el valor de la classe a què aquesta pertany.

RESUM

En aquest tema hem vist les xarxes LVQ com classificadors eficients. Aquestes xarxes aprofiten les característiques de les xarxes competitives i una simple xarxa lineal per desenvolupar un quantificador vectorial eficient. El gran avantatge de les xarxes LVQ respecte als perceptrons és la facilitat per classificar problemes que no siguin linealment separables amb un nombre de neurones reduït.





SESSIÓ 38

- ❖ Nom: Aplicacions de les xarxes neuronals.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 1 hores
- ❖ Dedicació: 2 hores
- ❖ Treball a lliurar: no
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1999]

OBJECTIUS

Els objectius d'aquesta sessió és presentar un resum de les aplicacions actuals de les xarxes neuronals així com els diferents àmbits en què s'apliquen. Es pretén simplement oferir una visió genèrica de l'ús de les xarxes neuronals sense profunditzar en com es duen a terme.

CONTINGUTS

7.6. Aplicacions de les xarxes neuronals

En aquest tema es mostrarà un recull d'àmbits en què actualment s'estan aplicant les xarxes neuronals. Simplement es pretén presentar la gran varietat de camps en què s'estan aplicant per justificar la utilitat i la versatilitat d'aquest tipus d'eines.

Aplicacions aeroespacials

Les xarxes neuronals s'estan aplicant en l'àmbit de les aplicacions aeroespacials millorant les capacitats dels pilots automàtics, com a sistemes de control de navegació de l'avió, en simuladors de vol (l'entrenament en situacions reals permet millorar les característiques dels simuladors), sistemes intel·ligents de detecció de fallades, etc...

Aplicacions en el camp de l'automoció

Dintre del camp de l'automoció també es poden trobar aplicacions que fan ús de les xarxes neuronals. Entre elles podem citar els sistemes automàtics de guiatge de vehicles o sistemes experts d'anàlisi per avaluar l'ús de les garanties. Aquest darrer sistema permet al fabricant detectar punts dèbils del vehicle així com extreure informació del perquè de les fallades.

Aplicacions financeres en bancs

Les xarxes neuronals també serveixen com a eina útil en moltes aplicacions d'entitats financeres. Els bancs estan començant a fer ús d'aquestes eines en aplicacions com ara els sistemes avaluadors per concedir crèdits, identificació de documents o reconeixement de signatures, control d'ús fraudulent de targetes de crèdit, anàlisi d'ús de línies de crèdit, etc...

Aplicacions militars

Evidentment, el món de les aplicacions militars no pot estar exclòs en l'ús de tècniques tan avançades com les xarxes neuronals. Dintre de l'àmbit de les aplicacions militars, les xarxes neuronals es fan servir en aplicacions com ara el guiatge de míssils, el seguiment d'objectius, discriminació d'objectes, reconeixement facial, sensors avançats, sonar, radar i processament d'imatge, extracció de paràmetres, cancel·lació i supressió de soroll, identificació de senyals, etc...

Aplicacions en el camp de l'electrònica

En el camp de l'electrònica poder trobar aplicacions com sistemes de visió artificial, predicció de sèries temporals, disseny de circuits integrats, control de processos, anàlisi de fallades dels xips, síntesi de veu o modelatge no lineal.

Aplicacions en empreses asseguradores

La determinació de la quota d'una assegurança implica càlculs financers complexos així com l'avaluació d'un gran conjunt de paràmetres. Les xarxes neuronals ofereixen solucions àgils per actuar com a classificadors de la persona dintre d'un grup de risc i estimar el valor de la quota que se li ha d'aplicar. Empreses asseguradores multinacionals estan començant a utilitzar aquestes eines per millorar els seus serveis.

Aplicacions en el camp de la producció

Les empreses de producció són també un camp on han aparegut de forma important aplicacions basades en xarxes neuronals. Entre totes les existents seguidament citem algunes de les més importants:

- 1.- Control de procés de producció.
- 2.- Disseny i anàlisi de nous productes.
- 3.- Diagnosi de maquinària.
- 4.- Identificació en temps real.
- 5.- Control de qualitat.
- 6.- Predicció de qualitat dels productes.
- 7.- Disseny de productes químics.
- 8.- Manteniment de maquinaria.
- 9.- Planificació i *management*.
- 10.- Etc...



Aplicacions mèdiques

Les aplicacions mèdiques també formen un conjunt de possibilitats per a l'aplicació de les xarxes neuronals. La dificultat de l'anàlisi de paràmetres per emetre diagnòstics així com el gran volum de dades que aquestes aplicacions manegen són camp fèrtil per al desenvolupament d'aquestes aplicacions. Entre elles podem citar l'anàlisi de cel·les cancerígenes, anàlisi de proves mèdiques com ara el EEG i ECG, disseny de pròtesis, reducció de despeses en hospitals, millora de la qualitat del servei, etc...

Aplicacions robòtiques

Si les xarxes neuronals intenten emular el comportament del cervell, resulta evident la seva aplicació en el camp de la robòtica. Evidentment existeixen un conjunt d'aplicacions dintre d'aquest camp on s'han tingut solucions reeixides. Entre elles podem citar el control de trajectòria en robots, control de braços robots, sistemes de visió artificial, sistemes d'anàlisi i decisió, etc...

Aplicacions en el processament de veu

La dificultat de les eines de síntesi i anàlisi de veu són handicaps que es poden millorar amb l'ús de xarxes neuronals. Aplicacions com ara el reconeixement de veu, compressió de veu, classificació de sons o conversors de text a veu són exemples d'aplicacions on les xarxes neuronals han tingut resultats reeixits.

Aplicacions en el camp de les telecomunicacions

El camp de les telecomunicacions també està dintre del camp d'aplicació de les xarxes neuronals. Aplicacions com compressió de veu i imatge, serveis automàtics d'informació, traducció en temps real de veu o sistemes de gestió de pagament han estat desenvolupades amb èxit en aquest camp.

RESUM

En aquesta sessió hem realitzat un breu resum de les aplicacions de les xarxes neuronals a diferents disciplines.





SESSIÓ 39

- ❖ Nom: Estudi d'aplicacions de xarxes neuronals
- ❖ Tipus: de problemes
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 3 hores
- ❖ Treball a lliurar: Sí
- ❖ Material:
 - Bibliografia bàsica:
 - [Tractament2008]
 - Bibliografia complementària:
 - [Haykin1999]

PRECEDENTS

En les sessions anteriors d'aquest capítol hem estat estudiant diferents topologies de les xarxes neuronals. S'han estudiat quines són les característiques més importants d'aquest tipus de xarxes així com les possibilitats que aquestes ofereixen de cara a la seva utilització en diferents aplicacions.

OBJECTIUS

En aquesta sessió l'objectiu és realitzar un estudi personalitzat de diferents aplicacions reals on s'estiguin utilitzant les xarxes neuronals i com aquestes estan esdevenint cada vegada més una eina útil en aplicacions reals.

CONTINGUTS

7.6.1. Estudi d'una aplicació real dels perceptrons

En aquest treball heu de realitzar un petit estudi documentat en què mostreu alguna aplicació real on es facin servir els perceptrons. El treball haurà de constar d'una plana autoexplicativa de l'aplicació i les referències a planes WEB o documentació digital on quedi il·lustrada l'aplicació.

7.6.2. Estudi d'una aplicació real de les xarxes competitives

En aquest treball heu de realitzar un petit estudi documentat en què mostreu alguna aplicació real on es facin servir les xarxes competitives. El treball haurà de constar d'una plana autoexplicativa de l'aplicació i les referències a planes WEB o documentació digital on quedi il·lustrada l'aplicació.

7.6.3. Estudi d'una aplicació dels mapes autoorganitzatius

En aquest treball heu de realitzar un petit estudi documentat en què mostreu alguna aplicació real on es facin servir els mapes autoorganitzatius. El treball haurà de constar d'una plana autoexplicativa de l'aplicació i les referències a planes WEB o documentació digital on quedi il·lustrada l'aplicació.

7.6.4. Estudi d'una aplicació de les xarxes LVQ

En aquest treball heu de realitzar un petit estudi documentat en què mostreu alguna aplicació real on es facin servir les xarxes LVQ. El treball haurà de constar d'una plana autoexplicativa de l'aplicació i les referències a planes WEB o documentació digital on quedi il·lustrada l'aplicació.

7.6.5. Criteris d'avaluació del treball

El criteri d'avaluació del treball que heu de realitzar sobre les xarxes neuronals es basarà no en la seva extensió, sinó en l'originalitat del treball. La documentació lliurada haurà de ser un document Word amb un petit resum de l'aplicació i la solució tecnològica presentada, una petita justificació de la utilització de la xarxa en l'aplicació i la documentació dels enllaços a la documentació sobre l'aplicació en concret.



BIBLIOGRAFIA

LLIBRES

Discrete-Time Signal Processing

Oppenheim, Alan V; Schafer, Ronald W.
Prentice-Hall
New Jersey, 1999
[Oppenheim1999]

Neural Networks

Haykin, Simon
Prentice-Hall
New Jersey, 1999
[Haykin1999]

Digital Signal Processing

Proakis, John G.; Manolakis, Dimitris G.
Macmillan Publishing Company
New York, 1992
[Proakis1992]

Adaptive filter theory

Haykin, Simon
Prentice-Hall
New Jersey, 1991
[Haykin1991]

Apunts de Tractament del Senyal i la Imatge

Morán, José Antonio; Socoró, Joan Claudi; Cobo, Germán
Enginyeria La Salle
Enginyeria La Salle, 2008
[Tractament2008]

PROBLEMES

Problemes de Tractament del Senyal i la Imatge (4t curs)

Meler, Lourdes; Morán, José Antonio; Socoró, Joan Claudi; Planet, Santiago;
Gonzalvo, Xavier; Monzo, Carlos; Cobo, Germán; Calzada, Àngel
Enginyeria La Salle
Enginyeria La Salle, 2008
[ProblemesTDSI2008]

PRÀCTIQUES

Pràctiques de Tractament del Senyal i la Imatge (4t curs)

Morán, José Antonio; Socoró, Joan Claudi; Cobo, Germán

Enginyeria La Salle

Enginyeria La Salle, 2008

[PractiquesTDSI2008]



GLOSSARI

Sistemes lineals i invariants en el temps, S.L.I.T.

Són els sistemes que compleixen les propietats tant de linealitat com de desplaçament temporal. Es defineixen tant per a sistemes de temps continu o analògics com per a sistemes de temps discret.

S.L.I.T.

Sistema lineal i invariant en el temps

Transformada de Fourier de seqüències discretes, T.F.S.D.

Eina d'anàlisi freqüencial per a seqüències i sistemes discrets. La T.F.S.D. d'una seqüència és una representació contínua del contingut freqüencial d'un senyal discret o que deixa o no deixa passar un sistema discret lineal i invariant. És una funció contínua de la variable polsació discreta.

T.F.S.D.

Transformada discreta de Fourier

Transformada discreta de Fourier, D.F.T.

Eina d'anàlisi freqüencial per a seqüències de durada finita. Permet representar tota la informació de la seqüència a partir d'un conjunt finit d'exponencials complexes, essent el vector freqüencial de la mateixa durada que el senyal discret.

D.F.T.

Transformada discreta de Fourier

Transformada ràpida de Fourier, F.F.T.

Algorisme de càlcul ràpid de la D.F.T. Es basa en la successiva descomposició del senyal temporal en subseqüències parelles i senars. Es redueix la complexitat de càlcul respecte la D.F.T. en un factor $\log_2(N)$, essent N el nombre de punts de la transformada.

F.F.T.

Fast Fourier Transform

Sèrie Discreta de Fourier, D.F.S.

Eina d'anàlisi freqüencial dels senyals discrets periòdics mitjançant la qual es pot expressar una seqüència periòdica de període N com a una combinació lineal de N exponencials complexes en el temps.

D.F.S.

Discrete Fourier Serie.

Filtre de resposta impulsional finita, F.I.R.

Filtre digital o de temps discret que es caracteritza per tenir una resposta impulsional finita en el temps. Aquest tipus de filtres no tenen part de realimentació i només es dissenyen a partir del posicionament de zeros.

F.I.R.

Finite Impulse Response filter.

**Filtre de resposta impulsional infinita, I.I.R.**

Filtre digital o de temps discret que es caracteritza per tenir una resposta impulsional infinita en el temps. Aquest tipus de filtres tenen part de realimentació i es dissenyen a partir del posicionament tant de zeros com de pols.

I.I.R.

Infinite Impulse Response filter.

Conversió analògic-digital, A/D

Sistema de conversió analògic-digital, mitjançant el qual un senyal continu és convertit a una seqüència discreta utilitzant un mostratge uniforme i una quantització d'amplituds generalment també uniforme.

A/D

Conversió analògic-digital.

Conversió digital-analògica, D/A

Sistema de conversió digital-analògica, mitjançant el qual una seqüència discreta és convertida a un senyal analògic o de temps continu. Aquest procés implica l'ús d'una funció d'interpolació o filtre de reconstrucció el qual proporciona la forma d'ona bàsica que serà modulada amb la informació de la seqüència discreta (idealment és una funció *sinc*).

D/A

Conversió digital-analògic.

Transformada de Fourier.

Eina d'anàlisi freqüencial tant per a senyals analògics com per sistemes analògics lineals i invariants. És una funció contínua de la variable polsació analògica "omega majúscula" (en [rad/seg.]) o freqüència analògica f (en [Hz]).

T.F.

Transformada de Fourier.

Delmació

Procés discret mitjançant el qual es redueix la freqüència de mostratge original amb la qual aquesta seqüència va ser mostrejada en un factor enter M . Inclou l'ús d'un filtre passa-baixes de guany 1 i polsació de tall π/M seguit d'un bloc que elimina $M-1$ de cada M mostres.

Interpolació

Procés discret mitjançant el qual s'augmenta la freqüència de mostratge original amb la qual aquesta seqüència va ser mostrejada en un factor enter L . Inclou l'ús d'un expansor (bloc que insereix $L-1$ zeros entre cada dues mostres del senyal original) i un filtre passa-baixes de guany L i polsació de tall π/L .

Aliasing

Efecte produït per la superposició de components espectrals de diferents bandes freqüencials quan un senyal analògic és mostreat amb una freqüència de mostratge menor que el doble de l'ample de banda del senyal (freqüència de Nyquist). Aquest



efecte es produeix quan el senyal analògic té contingut a la zona de baixa freqüència. En senyals passa-banda pot no produir-se en certes ocasions.

Criteri de Nyquist, Teorema de Nyquist

Teorema que defineix quina és la mínima freqüència de mostratge (n° mostres per segon) per poder reconstruir perfectament un senyal analògic d'ample de banda finit a partir de la seqüència obtinguda. Aquesta freqüència rep el nom de *freqüència de Nyquist* i ha de ser superior al doble de l'ample de banda del senyal en Hz. En cas contrari pot produir-se el fenomen de l'aliasing, el qual impossibilita recuperar el senyal original.

Overlap & Add, Overlap & Save

Mètodes de filtratge de senyals de durada indefinida amb el qual es divideix el senyal d'entrada al sistema en trames de longitud constant, de forma que es va calculant la sortida també per trams. Aquests mètodes possibiliten aplicar mètodes basats en el domini freqüencial (D.F.T. o F.F.T.) per realitzar un filtratge en temps real.

Regió de convergència, R.O.C.

Regió del domini de la variable complexa z en la qual la transformada Z d'un senyal convergeix, donant lloc a valors també complexos. Per a sistemes lineals i invariants estables cal que la R.O.C. inclogui el cercle unitat.

R.O.C.

Region of convergence.

Least Mean Square, LMS

Algorisme d'adaptació de coeficients per filtres adaptatius basat en l'aproximació instantània del gradient de l'algorisme del gradient descendent o del gradient estocàstic. Té un únic paràmetre de control que permet variar la velocitat de convergència, controlar l'estabilitat i l'error residual final.

LMS

Least Mean Square.

Recursive Least Squares, RLS

Algorisme d'adaptació de coeficients per filtres adaptatius basat en la minimització d'una funció de l'error a on aquest es pondera de forma exponencialment decreixent amb la història passada. Ofereix prestacions de capacitat de seguiment més bones que l'LMS però per contra té un cost computacional força major. Es basa en el *lema d'inversió de matrius* per realitzar un càlcul recursiu de la solució òptima al problema.

RLS

Recursive Least Squares.

Funció de densitat de probabilitat, PDF

Funció estadística característica de tot procés o variable aleatòria, i que permet estudiar la probabilitat que la variable es trobi en un cert interval d'amplituds.

PDF

Probability density function.

**Learning Vector Quantization, LVQ**

Conjunt de xarxes neuronals dissenyades específicament per realitzar una classificació i partició de la informació i/o característiques fonamentals de l'espai d'entrada.

LVQ

Learning vector quantization.

Radial basis function networks, RBFN

Xarxes neuronals de funcions de base radial. Són xarxes neuronals de dues capes a on, a diferència dels perceptrons, les neurones de la primera capa fan servir una funció lineal basada en distàncies Euclídees als *centroids* que representen els pesos sinàptics.

RBF

Radial basis function networks.

Minimum mean square error, MMSE

Criteri de mínim error quadràtic mig. Aquest criteri s'aplica a funcions lineals de paràmetres amb l'objectiu de minimitzar l'error de les mesures reals respecte dels valors de sortida que es volen obtenir. En problemes lineals (tal com s'ha dit) la solució és única, cosa que permet trobar una solució tancada al problema.

MMSE

Minimum Mean Square Error.