

2009

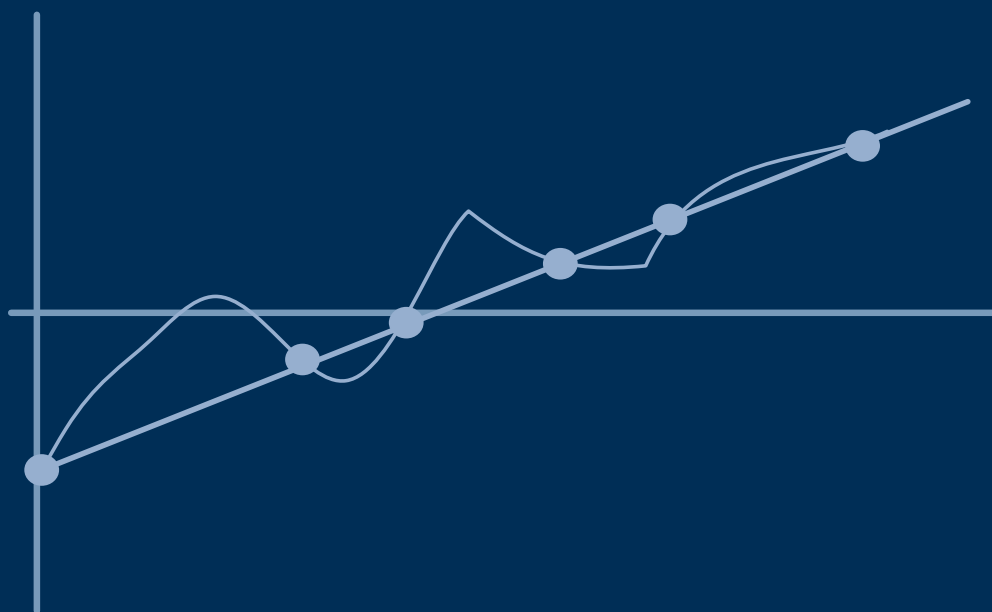
Creative Commons Deed

LaSalleOnLine  
ENGINYERIA

# ANÀLISI NUMÈRICA PER A L'ENGINYERIA TIC

Guia d'estudi

Álvaro Gaspar, Josep M<sup>a</sup> Martorell i Xavier Vilasís



**LA SALLE**   
ENGINYERIA I ARQUITECTURA

Universitat Ramon Llull





# **Creative Commons License Deed**

**Reconeixement-No comercial-Sense obres derivades 3.0 Espanya**

❖ **Vostè és lliure de:**

Copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra.

❖ **Sota els següents condicionants:**

**Reconeixement.**

S'ha de referenciar aquesta obra a Álvaro Gaspar de Valenzuela, Josep Maria Martorell i Xavier Vilasís - Enginyeria La Salle (Semipresencial)

**No comercial.**

No es pot utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.

**Sense obres derivades.**

No es pot alterar, transformar o generar una obra derivada a partir d'aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Alguna d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

**Els drets derivats d'usos legítims o altres limitacions reconegudes per llei no queden afectats per l'anterior**

Això és un resum fàcilment llegible del text legal (la llicència completa) disponible en els idiomes següents:  
Català Castellà Basc Gallec



# Crèdits

- ❖ **Autor:** Álvaro Gaspar de Valenzuela, Josep Maria Martorell i Xavier Vilasís
- ❖ **Editor:** Lluís Vicent
- ❖ **Coordinació lingüística:** Sara Laso
- ❖ **Revisió lingüística:** Christian Lara
- ❖ **Maquetació:** Víctor Miras
- ❖ **Disseny de portada:** Víctor Miras

Aquesta edició ha comptat amb el suport de l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de la Generalitat de Catalunya en la Convocatòria d'ajuts a l'edició i la difusió de llibres de text o manuals universitaris i llibres científicotècnics, en suport paper o en suport electrònic, escrits en llengua catalana (DILL 2009)



Generalitat de Catalunya  
Departament d'Innovació,  
Universitats i Empresa  
**Comissionat per a Universitats  
i Recerca**

**ISBN:** 978-84-937374-0-5





# Índex

<b>SESSIÓ 1: Tractament i propagació d'errors. ....</b>	<b>5</b>
<b>1 Errors .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Introducció.....</b>	<b>5</b>
1.1.1 Conceptes .....	5
1.1.2 Fonts d'error .....	6
<b>1.2 Propagació .....</b>	<b>7</b>
1.2.1 Propagació de l'error absolut .....	7
1.2.2 Propagació de l'error relatiu.....	8
PROBLEMA.....	8
<b>SESSIÓ 2: Condicionament i estabilitat.....</b>	<b>11</b>
<b>1.3 Condicionament i estabilitat .....</b>	<b>11</b>
1.3.1 Condicionament d'un problema .....	11
1.3.2 Estabilitat numèrica .....	12
PROBLEMA.....	13
PROBLEMA.....	14
<b>SESSIÓ 3: Interpolació polinòmica (i).....</b>	<b>15</b>
<b>2 Interpolació i aproximació .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 Introducció.....</b>	<b>15</b>
2.1.1 Conceptes i definicions .....	15
<b>2.2 Interpolació polinòmica .....</b>	<b>16</b>
2.2.1 Introducció.....	16
2.2.2 Interpolació de Lagrange .....	17
2.2.3 Interpolació de Newton .....	18
PROBLEMA.....	19
PROBLEMA.....	19
<b>SESSIÓ 4: Interpolació polinòmica (ii).....</b>	<b>21</b>
2.2.4 Interpolació de Txebitxev .....	21
2.2.5 Interpolació d'Hermite .....	23
2.2.6 Fenomen de Runge .....	24
PROBLEMA.....	24
<b>SESSIÓ 5: Aproximació de funcions.....</b>	<b>27</b>
<b>2.3 Aproximació de funcions .....</b>	<b>27</b>
2.3.1 Introducció.....	27
2.3.2 Espais de Hilbert .....	28
2.3.3 Famílies de polinomis ortogonals .....	29
<b>SESSIÓ 6: Aproximació per mínims quadrats .....</b>	<b>33</b>
2.3.4 Mínims quadrats.....	33
PROBLEMA.....	37
PROBLEMA.....	37
<b>SESSIÓ 7: Aproximació minimax.....</b>	<b>39</b>
2.3.5 Aproximació minimax .....	39
PROBLEMA.....	42



PROBLEMA.....	42
<b>SESSIÓ 8: Integració numèrica en abscisses conegudes.....</b>	<b>43</b>
<b>3 Integració numèrica.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1 Integració en abscisses donades .....</b>	<b>43</b>
3.1.1 Regles dels Trapezis i Simpson.....	43
3.1.2 Integració interpolatòria.....	45
3.1.3 Fórmules de Newton-Cotes .....	46
PROBLEMA.....	47
<b>SESSIÓ 9: Integració gaussiana .....</b>	<b>49</b>
<b>3.2 Integració gaussiana .....</b>	<b>49</b>
3.2.1 Abscisses d'integració gaussiana .....	49
3.2.2 Fórmules d'integració .....	50
PROBLEMA.....	52
PROBLEMA.....	52
<b>SESSIÓ 10: Mètodes d'acceleració.....</b>	<b>53</b>
<b>3.3 Mètodes d'acceleració.....</b>	<b>53</b>
3.3.1 Estimació del pas .....	53
3.3.2 Fórmula d'Euler-Maclaurin .....	54
3.3.3 Extrapolació de Richardson .....	55
PROBLEMA.....	56
PROBLEMA.....	56
<b>SESSIÓ 11: Integració impròpia.....</b>	<b>57</b>
<b>3.4 Integrals impròpies.....</b>	<b>57</b>
3.4.1 Impròpies de primera espècies.....	57
3.4.2 Impròpies de segona espècie .....	59
<b>SESSIÓ 12: Resolució d'EDOs (mètode simples).....</b>	<b>63</b>
<b>4 Resolució d'equacions diferencials ordinàries.....</b>	<b>63</b>
<b>4.1 Mètodes simples d'un pas .....</b>	<b>63</b>
4.1.1 Plantejament del problema .....	63
4.1.2 Mètode d'Euler .....	64
4.1.3 Mètode de Taylor .....	65
PROBLEMA.....	67
<b>SESSIÓ 13: Tractament de l'error en la resolució d'EDOs.....</b>	<b>69</b>
4.1.4 Ordre d'un mètode .....	69
4.1.5 Tractament de l'error .....	70
<b>SESSIÓ 14: Mètodes de Runge-Kutta .....</b>	<b>73</b>
<b>4.2 Mètodes de Runge-Kutta .....</b>	<b>73</b>
4.2.1 Els mètodes de Runge-Kutta.....	73
4.2.2 Els mètodes RK2 i RK4.....	75
PROBLEMA.....	77
<b>Annex.....</b>	<b>79</b>
<b>EXERCICIS .....</b>	<b>79</b>
Problema 1.....	79
Problema 2.....	80



Problema 3.....	81
Problema 4.....	82
Problema 5.....	83
Problema 6.....	84
Problema 7.....	85
Problema 8.....	88
Problema 9.....	91
Problema 10.....	95
Problema 11.....	100
Problema 12.....	105
Problema 13.....	108
Problema 14.....	113
Problema 15.....	114
Problema 16.....	115
Problema 17.....	116
Problema 18.....	117
Problema 19.....	117
Problema 20.....	118
<b>Bibliografia .....</b>	<b>125</b>
<b>Glossari.....</b>	<b>127</b>





# SESSIÓ 1: Tractament i propagació d'errors

## FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Tractament i propagació d'errors.
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

## OBJECTIUS

L'objectiu bàsic d'aquesta sessió és exposar els conceptes clau per a l'estudi de l'error comès en un mètode numèric, tant pel que fa a les mateixes definicions i conceptes, com a la forma amb què matemàticament tractarem la seva propagació en cada pas de computació.

## CONTINGUTS

En primer lloc presentarem els conceptes bàsics sobre el tractament d'errors, i a continuació exposarem la metodologia per a calcular la propagació de l'error en un mètode numèric.

## 1 Errors

### 1.1 Introducció

#### 1.1.1 Conceptes

En aquest apartat presentarem les magnituds que permeten fer una anàlisi de la diferència entre el que anomenarem  $x$  (valor exacte de la magnitud) i  $\bar{x}$  (valor aproximat).

#### Error absolut

Anomenem error absolut a la diferència entre el valor exacte i l'aproximat d'una certa magnitud:

$$e_a(x) = x - \bar{x}$$



Sovint el valor exacte no és conegut i utilitzem una fita superior d'aquest error:

$$|e_a(x)| \leq \varepsilon_a(x)$$

amb la qual cosa

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_a(x)$$

- [Aubanell1991] p1

## Error relatiu

Saber l'error absolut d'una variable no és suficient per conèixer la magnitud del problema, perquè depèn clarament del valor de la variable. Per això treballem en general amb l'error relatiu:

$$e_r(x) = \frac{e_a(x)}{x}$$

Anàlogament amb l'error absolut, hom també acostuma a utilitzar-ne una fita superior per desconèixer de l'error relatiu exacte que s'està cometent:

$$|e_r(x)| \leq \varepsilon_r(x)$$

amb la qual podem expressar l'error sobre  $x$  com

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_a(x) = \bar{x}(1 \pm \varepsilon_r(x))$$

- [Aubanell1991] p1

## 1.1.2 Fonts d'error

Deixant a banda l'error sempre present pel fet que s'utilitza un model matemàtic per descriure la realitat, les fonts d'error es poden agrupar en tres grups bàsics: entrada, operacions i sortida.

### Errors en les dades d'entrada

L'aparell que proporciona les dades d'entrada tindrà una certa precisió, en donar les dades en representació decimal

$$x = a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0 + a_{-1} b^{-1} + \dots$$

o coma flotant

$$fl(x) = mb^q$$

on anomenem a  $m$  mantissa,  $b$  base i  $q$  exponent. La presentació es farà fins a un cert decimal, segons tall (supressió de tots els dígits a partir del desitjat) o arrodoniment



(en el qual el darrer dígit que es manté s'augmenta en una unitat o no segons les regles habituals).

- [Aubanell1991] p2-p3
- [Bonet1994] p12-p13

## Error d'arrodoniment durant el càlcul

A cada pas, l'aparell que calcula arrodoneix (o talla) amb la seva pròpia resolució. Aquesta és una altra de les possibles fonts de l'error, que posa de manifest la necessitat d'estudiar-ne la propagació.

- [Aubanell1991] p4
- [Bonet1994] p15

## Error de truncament del mètode

En resoldre un problema mitjançant un mètode numèric, aquest incorpora un cert error fruit precisament del fet que és un mètode aproximat. Per a alguns d'aquests mètodes, disposem de les expressions d'aquest error, com veurem més endavant. En tot cas, queda patent la necessitat d'establir per cada metodologia una expressió que indiqui com és l'error comès.

- [Aubanell1991] p4

# 1.2 Propagació

## 1.2.1 Propagació de l'error absolut

El problema és què passa si necessitem avaluar el valor d'una funció en la qual una o més de les seves variables són conegudes amb un cert error.

### Problema unidimensional

Suposem que volem avaluar una funció  $y=f(x)$ , on de  $x$  tan sols coneixem el seu valor aproximat  $\bar{x}$ , amb un error

$$e_a(x) = x - \bar{x}$$

El teorema del valor mitjà ens permet aproximar a primer ordre l'expressió de l'error absolut de  $y$ :

$$e_a(y) \approx |f'(\bar{x})|e_a(x)$$

- [Aubanell1991] p5



## Problema n-dimensional

Anàlogament, la funció  $y=f(x)$  pot dependre d'una variable  $x$  que viu a

$$\mathbb{R}^n$$

En aquest cas, suposant que són diverses les components de  $x$  que contenen errors,

$$e_a(y) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} e_a(x_i)$$

Aquestes expressions són les anomenades fórmules de l'error a primer ordre i tan sols són exactes per funcions lineals en les variables que contenen error.

- [Aubanell1991] p6

### 1.2.2 Propagació de l'error relatiu

D'igual manera que amb l'absolut, les fórmules de propagació lineals ens permeten calcular a primer ordre l'evolució de l'error a través d'una funció, en aquest cas per l'error relatiu.

### Fórmules de propagació

A partir de la definició d'error relatiu i de les expressions per l'error absolut, podem arribar l'expressió per funcions unidimensionals:

$$e_r(y) = \frac{e_a(y)}{\bar{y}} = \dots = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \left| f'(\bar{x}) \right| e_r(x)$$

i generalitzar-les pel cas n-dimensional:

$$e_r(y) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}} \left| \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} e_r(x_i)$$

## PROBLEMA

Mitjançant les fórmules de propagació donades, calculeu les expressions següents:

$$e_a(x_1 \pm x_2)$$

$$e_r(x_1 x_2)$$

$$e_r(x_1 / x_2)$$

en funció dels errors de cada una d'aquestes magnituds.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem exposat les magnituds que s'utilitzen per quantificar l'error en una variable, les causes principals d'aquest error, i les fórmules per tal d'estudiar la propagació d'aquest error.





## SESSIÓ 2: Condicionament i estabilitat

### FITXA DE LA SESSIÓ

---

- ❖ Nom: Condicionament i estabilitat
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

---

En la sessió anterior vam descriure com quantificar l'error d'una certa variable, què pot causar aquest error, i de quina forma es propaga quan aquesta variable era utilitzada dins d'una funció.

### OBJECTIUS

---

En aquesta sessió estudiarem de quina forma l'error en una variable pot afectar el resultat final quan el mètode que s'utilitza per fer els càlculs no és adequat per a aquell problema en concret. Estudiarem, per tant, en quines situacions un determinat mètode numèric no és la millor elecció per resoldre el problema.

### CONTINGUTS

---

En primer lloc, exposarem què determina el bon o mal condicionament d'un problema. Després, discutirem en quins casos ens podem trobar amb un problema numèricament inestable, i com resoldre aquesta situació. Durant tota aquesta sessió ens basarem en exemples concrets per mostrar millor a què ens referim en cada cas.

## 1.3 Condicionament i estabilitat

---

### 1.3.1 Condicionament d'un problema

---

El fet que un problema estigui ben condicionat o no depèn del comportament d'aquest davant d'una petita variació de les dades d'entrada. Així, direm que un problema està ben condicionat si petites variacions en les dades d'entrada provoquen petites variacions en les dades de sortida. A l'inrevés, no estarà ben condicionat si mostra gran sensibilitat en el resultat per petites variacions en les entrades.



## L'exemple del sistema d'equacions

Un exemple molt típic és la resolució d'un sistema d'equacions lineals. Així, el següent sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 0.499x + 1.001y = 1.5 \end{array} \right\}$$

té per solució  $x = y = 1$ , mentre que el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 0.5x + 1.001y = 1.5 \end{array} \right\}$$

té per solució  $x = 3$  i  $y = 0$ . És a dir, una variació de 0.001 en un dels coeficients provoca una variació d'ordre unitat en la solució. En aquest cas particular, la causa és que el sistema representa dues rectes quasi paral·leles.

- [Bonet1994] p22-p23 (especialment figura 1.1)

## 1.3.2 Estabilitat numèrica

Diem que un algorisme és numèricament estable si els errors d'arrodoniment són inofensius de cara al bon comportament del mètode. En canvi, direm que és inestable els errors d'arrodoniment són dramàtics.

## L'exemple de les arrels quadràtiques

Un cas que apareix sovint és la inestabilitat a l'hora de calcular les arrels d'una paràbola, mitjançant la fórmula coneguda

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per exemple, si s'aplica per trobar les arrels de la funció  $f(x) = x^2 - 200x + 1$  (que són aproximadament 199,995 y 0,005) fent servir només quatre xifres significatives, obtenim el següent resultat:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 4}}{2} \approx \frac{200 \pm \sqrt{40000}}{2} = \frac{200 \pm 200}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{400}{2} = 200 \\ \frac{0}{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'error absolut és comparable en ambdós, però l'error relatiu de la segona solució és desastrós degut a l'operació de resta. En la primera solució, tot i que té el mateix



problema d'aproximar 39996 per 40000 (ja que només podem guardar quatre xifres significatives en els nostres càlculs), el resultat pot ser acceptable (encara que si el substituïm en l'equació original ens dona  $f(200)=1$ , que és el mateix resultat que ens dona  $f(0)$ , i que no s'assembla al  $f(x)=0$  que busquem, per algunes aplicacions això pot no suposar un problema).

La solució és canviar de fórmula per aconseguir una que no tingui restes, si és possible. En aquest cas estem de sort, si ens adonem que

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \\ &= \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2}{200 + \sqrt{40000 - 4}} \approx \frac{2}{200 + \sqrt{40000}} = \frac{2}{200 + 200} = \frac{2}{400} = 0,005 \end{aligned}$$

Si el problema succeís a l'altra solució (perquè el coeficient  $b$  fos negatiu), es pot resoldre de la mateixa manera. Així, segons el signe de  $b$ , podem calcular una de les solucions de la manera normal i l'altra així, assegurant estabilitat en ambdós casos.

## L'exemple en algorisme recursius

Una altre exemple de mètode numèric inestable és aquell en el qual la recursivitat propaga els errors i afecta de forma dramàtica el resultat final. Per exemple, les integrals del tipus

$$I_n = \int_0^1 dx x^n e^{x-1}$$

compleixen la relació (es pot obtenir fàcilment integrant per parts)

$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$

que ens permet calcular-la per qualsevol  $n$  a partir d'una condició inicial. Doncs bé, partint de  $I_0 = 0.632120$  (amb sis xifres significatives), que és senzill d'integrar, la recursivitat dona

$$I_9 = -0,068480$$

resultat absolutament impossible, doncs la integral és positiva per qualsevol  $n$ . El problema es resol plantejant la recurrència a l'inrevés.

- [Bonet1994] p19

## PROBLEMA

En l'exemple de l'algorisme recursiu, trobeu la fórmula de l'error de  $I_n$  en funció de l'error de  $I_0$  i viceversa. Què succeeix amb l'error quan  $n$  tendeix a infinit en cada cas?



Assigneu valors aleatoris a  $I_{20}$  i apliqueu la fórmula de recursivitat cap a rere per trobar el valor de  $I_0$  (un full de càlcul pot ser útil). Què observeu?

## PROBLEMA

---

Resoleu l'equació  $\frac{a}{x} = 0.2 - \frac{x}{100}$ , on 'a' és una paràmetre de valor  $1 \pm 0.001$ , i estudeu els efectes de la incertesa en aquest paràmetre sobre les solucions de l'equació.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem presentat diferents exemples en què el mètode que s'utilitza no està ben condicionat, o bé és numèricament estable.



## SESSIÓ 3: Interpolació polinòmica (i)

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Interpolació polinòmica (i)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En les sessions anteriors s'han descrit les eines per a treballar en el càlcul i propagació d'errors, pas previ per a poder presentar qualsevol metodologia dins el càlcul numèric.

### OBJECTIUS

En aquesta primera sessió en què parlarem d'interpolació i aproximació, l'objectiu és presentar els conceptes bàsics, les diferències entre els diferents mètodes, i presentar els mètodes bàsics per resoldre el problema de la interpolació.

### CONTINGUTS

En primer lloc, presentem les diferències entre la interpolació i l'aproximació de funcions. A continuació, exposem els mètodes bàsics d'interpolació polinòmica.

## 2 Interpolació i aproximació

### 2.1 Introducció

#### 2.1.1 Conceptes i definicions

Suposem que, d'un sistema que volem caracteritzar, coneixem un conjunt de valors d'entrada, que anomenarem  $x_k$ , i les corresponents sortides per aquests valors,  $y_k$ . La qüestió és com aconseguir una funció que relacioni entrades i sortides, amb la qual es caracteritzi el sistema en qüestió.



## Interpolació

Una possibilitat és buscar una funció,  $p(x)$ , que passi pels mateixos punts  $(x_k, y_k)$  que coneixem del sistema. D'això se'n diu construir la interpolació: construir una funció aproximadora que compleixi

$$p(x_k) = y_k$$

per tots els valors coneguts. En funció del caràcter que aquests punts mostrin del sistema (trigonomètric, polinòmic, racional,...), la funció  $p(x)$  es tria d'un tipus o d'un altre.

- [Aubanell1991] p183-p184
- [Bonet1994] p85

## Aproximació

Una altra opció ben diferent és l'aproximació, és a dir, buscar una funció que anomenarem

$$f_n(x)$$

a la qual no demanarem que passi per cap punt en concret, sinó que minimitzi l'error respecte els valors coneguts  $(x_k, y_k)$  del sistema. Com definim aquest "error" determinarà quin dels diferents mètodes d'aproximació escollim.

- [Aubanell1991] p201-p202

## 2.2 Interpolació polinòmica

### 2.2.1 Introducció

Per simplicitat, estudiarem el problema de la interpolació polinòmica. Per tant, es busca un  $p_n(x)$  (polinomi de grau  $n$ ) que compleixi

$$p_n(x_k) = y_k$$

per aquells punts coneguts.

### Solució de grau mínim

L'objectiu és, de totes les solucions existents, trobar aquell polinomi de grau mínim. Es demostra que, donades les abscisses  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de les quals es coneixen les



corresponents ordenades  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ , existeix i és únic un polinomi de grau  $n$  que compleix

$$p_n(x_k) = y_k$$

per  $k = 0 : n$ .

- [Aubanell1991] p185-p186
- [Bonet1994] p86

## 2.2.2 Interpolació de Lagrange

Basat en les propietats de la família de polinomis de Lagrange, és possiblement un dels mètodes més utilitzats, a causa de la simplicitat en la construcció del polinomi.

### Polinomis de Lagrange

Donat un conjunt de punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ , el polinomi de Lagrange de grau  $i$  es defineix com

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Aquest polinomi és de grau  $n$ , i té com a propietat essencial per al càlcul de la interpolació el seu comportament com a delta de Kronecker en els punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ :

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- [Aubanell1991] p187
- [Bonet1994] p88

### Polinomi interpolador

A partir de les propietats dels polinomis de Lagrange, el polinomi interpolador de grau  $n$  es construeix com

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$



que compleix, per qualsevol dels punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ , la condició d'interpolació:

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{kj} = y_j$$

- [Aubanell1991] p187
- [Bonet1994] p87

## Error d'interpolació

Els punts  $(x_k, y_k)$  a interpolar són "produïts" per una certa funció  $f(x)$ , que caracteritza realment el sistema. Fora dels punts que s'interpolen (per on el polinomi passa i, per tant, comet un error nul), la diferència entre el polinomi interpolador  $p_n(x)$  i la funció  $f(x)$  ve donada per l'expressió

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

en què el punt  $\xi$  pertany a l'interval que conté a les abscisses d'interpolació  $\{x_0, \dots, x_n\}$  i al punt  $x$  en què s'avalua aquesta diferència.

## 2.2.3 Interpolació de Newton

Anomenada també interpolació en diferències dividides, intenta resoldre un problema fonamental en Lagrange: amb aquest mètode presentat anteriorment, el fet d'afegir més punts d'interpolació obliga a calcular-ho tot de nou.

## Diferències dividides

Anomenem diferències dividides a unes quantitats que es calculen a partir de quocients de diferències (d'aquí el seu nom), definides de forma recursiva com:

$$\begin{cases} f[x_i] = y_i \\ f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{(x_i - x_j)} \\ \vdots \\ f[x_i, \dots, x_k] = \frac{f[x_i, \dots, x_{k-1}] - f[x_{i+1}, \dots, x_k]}{(x_i - x_k)} \end{cases}$$

Per tant, es pot observar com la primera és el mateix valor de la funció, i a partir d'aquesta es construeixen les següents. Una propietat bàsica de les diferències



dividides és el fet de la simetria en els seus arguments: importa en quins punts es calcula, no en quin ordre apareixen. Per exemple,

$$f[x_i, x_j] = f[x_j, x_i]$$

- [Aubanell1991] p190-191
- [Bonet1994] p88-p89

## Polinomi interpolador

Si volem no haver de tornar a calcular tots els paràmetres cada cop que afegim alguna abscissa d'interpolació, la base de polinomis a partir de la qual es calcula el polinomi d'interpolació es pot construir de la forma següent:

$$\langle 1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \rangle$$

per un conjunt de punts  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Amb aquesta base, es demostra que els coeficients 'a' que formen el polinomi interpolador

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

són directament les diferències dividides definides en aquest mateix apartat:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k]$$

- [Aubanell1991] p191-192
- [Bonet1994] p88-p89

## PROBLEMA

Demostreu que la solució al problema d'interpolació existeix i és única per  $(n+1)$  punts  $(x_k, y_k)$  i un polinomi de grau  $n$ .

## PROBLEMA

Calculeu el polinomi interpolador dels punts  $(1,0)$ ,  $(3,2)$  i  $(4,2)$  pels mètodes de Lagrange i diferències dividides (Newton). Compareu-ne els resultants i justifiqueu el resultat obtingut.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem posat les bases de la interpolació polinòmica, i hem definit els principals conceptes i presentat els mètodes que es basen en un conjunt d'abscisses predeterminades.



## SESSIÓ 4: Interpolació polinòmica (ii)

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Interpolació polinòmica (ii)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En l'anterior sessió hem presentat què és una interpolació, que significa fer-la amb polinomis i quins són els dos principals mètodes a partir d'un conjunt d'abscisses determinades: Lagrange i Newton.

### OBJECTIUS

En aquesta sessió presentarem mètodes per millorar els aspectes deficients en els descrits en la sessió anterior, i quin són igualment els que apareixen en aquestes noves metodologies.

### CONTINGUTS

En primer lloc, presentarem la interpolació de Tchebitxev com a forma per minimitzar l'error. A continuació, la metodologia d'Hermite per tenir en compte els coneixements sobre la derivada de la funció a interpolar, i finalment parlarem dels fenòmens que apareixen al intentar interpolar grans conjunts de punts.

#### 2.2.4 Interpolació de Tchebitxev

Els mètodes presentats anteriorment van aportar una fórmula per a l'error d'interpolació que depenia d'una certa derivada de la funció, un factorial i un producte de binomis:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

#### Minimitzar l'error

Estudiant l'expressió de l'error d'interpolació, es veu que l'únic punt en què es pot intentar millorar el valor de l'error és en el producte de binomis, que depèn de les abscisses d'interpolació.



Es demostra que el conjunt  $\{x_0, \dots, x_n\}$  d'abscisses d'interpolació en l'interval  $[-1, 1]$  que minimitzen l'error comès són els zeros del polinomi de Tchebitxev d'ordre  $n+1$ :

$$T_{n+1}(x_j) = 0$$

És important destacar que aquest mètode tan sols ens dona un conjunt de punts pels quals l'error d'interpolació és mínim. Un cop trobats aquests, la interpolació s'efectua per qualsevol dels mètodes estudiats.

- [Bonet1994] p99-p100

## Els polinomis de Tchebitxev

Els polinomis de Tchebitxev es defineixen de forma explícita com:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

De forma recurrent es poden calcular amb l'expressió

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

a partir de les condicions inicials  $T_0 = 1$  i  $T_1 = x$ . L'expressió explícita la utilitzarem en el càlcul dels zeros d'aquests polinomis, mentre que la recurrent ens serà més còmode utilitzar-la per a generar-los.

- [Bonet1994] p99

## Propietats

El coeficient de grau més alt d'un polinomi de Tchebitxev sempre té el mateix valor, independentment del grau d'aquest polinomi:

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

En què  $\{x_0, \dots, x_n\}$  són els zeros del polinomi  $T_n(x)$ . Quina forma tenen aquests zeros? On s'anul·la un polinomi de Tchebitxev? Igualant a zero la forma explícita, obtenim

$$x_k = \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Nota: aquests són els  $n$  zeros d'un polinomi de Tchebitxev d'ordre  $n$ . Per a una interpolació d'ordre  $n$  calen  $n+1$  punts, i per tant un polinomi de Tchebitxev d'ordre  $n+1$ .



Si l'interval en què es vol realitzar la interpolació no és  $[-1,1]$ , sinó un interval qualsevol  $[a,b]$ , aleshores hem de fer un canvi de variable lineal del tipus

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$$

resoldre el problema i desfer el canvi.

- [Bonet1994] p99-p101

## 2.2.5 Interpolació d'Hermite

Sovint no només tenim informació sobre el valor de la funció en certs punts, sinó també sobre el valor de la derivada en aquells punts. És possible construir un polinomi que compleixi ambdues condicions (valor i derivada) generalitzant els mètodes de Lagrange o Newton. El polinomi obtingut a partir d'aquestes  $2(n+1)$  condicions serà d'ordre  $2n+1$ .

### Generalització de Lagrange

Generalitzar el mètode d'interpolació de Lagrange vol dir trobar una base que compleixi propietats de delta de Kronecker en els valors coneguts de funció i derivada. Això s'aconsegueix amb el conjunt de funcions

$$\begin{aligned}\phi_j(x) &= (1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j))L_j^2(x) \\ \psi_j(x) &= (x - x_j)L_j^2(x)\end{aligned}$$

que compleixen

$$\begin{cases} \phi_j(x_k) = \delta_{jk} & \phi_j'(x_k) = 0 \\ \psi_j(x_k) = 0 & \psi_j'(x_k) = \delta_{jk} \end{cases}$$

D'aquesta manera, el polinomi interpolador es construeix com

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n y_k \phi_k(x) + \sum_{k=0}^n y'_k \psi_k(x)$$

- [Aubanell1991] p198-p199

### Generalització de Newton

L'objectiu s'assoleix considerant per partida doble cada un dels punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$  a partir dels quals interpolem. D'aquesta manera, la base que s'utilitza és

$$\langle 1, (x - x_0), (x - x_0)^2, (x - x_0)^2(x - x_1), \dots \rangle$$



Al calcular les diferències dividides ens trobem amb un problema important, quan s'ha de calcular la de dos punts iguals:

$$f[x_i, x_i] = \frac{f[x_i] - f[x_i]}{x_i - x_i} = \left( \frac{0}{0} \right)$$

Aquesta indeterminació es resol de la següent manera:

$$f[x_i, x_i] = \lim_{x_j \rightarrow x_i} f[x_i, x_j] = \lim_{x_j \rightarrow x_i} \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j} = f'(x_i)$$

i d'aquí el fet que el polinomi construït també interpola la derivada.

- [Aubanell1991] p199-p201
- [Bonet1994] p101-p102

## 2.2.6 Fenomen de Runge

En principi, sembla que el polinomi interpolador pugui cometre un error tan petit com desitgem amb el simple fet d'augmentar el nombre de punts amb què s'interpola. És a dir, esperaríem que es complís.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

### Casuística de Runge

El problema és que en general aquesta relació no és certa: és a dir, no podem assegurar que l'error global disminuirà en augmentar el número d'abscisses d'interpolació. En general, un número elevat d'abscisses d'interpolació implicarà un polinomi interpolador altament oscil·lant, a causa del seu grau elevat. En els punts d'interpolació el polinomi complirà les condicions, però fora d'ells cometrà un gran error. Aquest és l'anomenat fenomen de Runge.

- [Bonet1994] p102-p104 (especialment la figura de la pàgina 103)

## PROBLEMA

Sigui la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Suposem que la interpolem amb un polinomi de grau  $n$ ,  $p_n(x)$ , amb abscisses equiespaiades de la forma

$$x_k = -5 + \frac{10}{n}k$$

Comproveu que la successió  $p_n(x)$  divergeix; és a dir, que a mesura que s'augmenta  $n$ , el polinomi interpolador s'allunya de la funció  $f(x)$ .

## RESUM

---

En aquesta sessió hem presentat dos nous mètodes: la interpolació de Txebitxev, que assegura el polinomi d'error mínim a partir de l'elecció de les millors abscisses; i la interpolació d'Hermite, que interpola el valor i també la derivada en cada abscissa. Finalment, hem alertat sobre el fenomen de Runge, que impedeix interpolacions amb polinomis de grau molt alt.





## SESSIÓ 5: Aproximació de funcions

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Aproximació de funcions
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En les sessions anteriors havíem plantejat el problema de la interpolació com una forma de, a partir del coneixement d'una funció en un conjunt finit de punts, construir un polinomi que tingués les mateixes propietats que la funció en qüestió en aquells punts (bàsicament, que passés pels mateixos punts).

### OBJECTIUS

En aquesta sessió posarem les bases per poder treballar el problema de l'aproximació de funcions: és a dir, ser capaços de calcular una nova funció aproximadora que minimitzi un cert error respecte la funció que volem aproximar.

### CONTINGUTS

Després d'introduir el problema, parlarem de l'espai de Hilbert per fer més natural conceptes com la ortogonalitat o la projecció entre funcions en un cert espai.

## 2.3 Aproximació de funcions

### 2.3.1 Introducció

La interpolació polinòmica que ja hem estudiat ens proporciona un polinomi que coincideix amb la funció que volem aproximar en un cert conjunt de punts. L'aproximació de funcions intenta anar més enllà d'aquesta metodologia, i busca una aproximació sense restringir que passi per uns punts en concret.



## Minimització de l'error

L'objectiu dels mètodes d'aproximació serà construir una funció aproximadora, que anomenarem  $f_n(x)$ , que approximi correctament la funció  $f(x)$  del problema. Què donarà aquest criteri de "correcte aproximació"?

Els diferents mètodes es distingeixen pel quina magnitud defineixen com a mesura de l'error de l'aproximació. Un cop escollida una certa manera de mesurar l'error comès, es tracta de trobar l'aproximació  $f_n(x)$  que el minimitza.

- [Aubanell1991] p201-p202
- [Bonet1994] p109

## 2.3.2 Espais de Hilbert

Els espais de Hilbert són espais formats per funcions, anàlogament als espais vectorials. Aquesta semblança ens permet introduir una forma de treballar de caràcter algebraic, definint normes, productes escalars, projeccions, etc.

## Elements i pesos

Definim en primer lloc les funcions pes,  $\omega(x)$ , com aquelles funcions de recorregut positiu per a les quals existeixen les integrals

$$\int_a^b dx \omega(x) x^k$$

per qualsevol  $k$ . Una funció pes, com el seu nom indica, mostra quines zones de l'interval tenen més importància, de la mateixa manera que les densitats de probabilitat en variables aleatòries.

Quins elements formen part d'un espai de Hilbert? Totes aquelles funcions en què el seu quadrat és integrable amb el pes corresponent:

$$L_{\omega}^2(a, b) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R} / \int_a^b dx \omega(x) f(x)^2 < \infty \right\}$$

Per tant, l'interval i la funció pes determinen de quin espai de Hilbert estem parlant.



## Producte escalar i norma

De la mateixa manera que quan treballem en un espai vectorial definim una operació interna producte escalar, en aquest cas també. Definim el producte escalar entre dues funcions,  $f(x)$  i  $g(x)$ , com

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \int_a^b dx \omega(x) f(x)g(x)$$

L'operació així definida compleix les dues propietats bàsiques d'un producte escalar: és simètrica als seus arguments ( $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ ) i sempre és positiva o nul·la amb una funció per si mateixa ( $\langle f, f \rangle \geq 0$ ).

Definit un producte escalar, el pas següent és definir una norma, com l'arrel quadrada del producte d'una funció per si mateixa:

$$\|f\|_{\omega} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\omega}}$$

- [Aubanell1991] p206

## Errors

L'error es defineix sempre com la diferència de la funció  $f$  i la seva aproximació,  $f_n(x)$ :

$$e(x) = f(x) - f_n(x)$$

A partir d'aquí, existeixen principalment dues opcions de norma d'aquesta funció: la més utilitzada, la norma euclidiana (que quotidianament diríem "distància"):

$$\|e\|_{2,\omega} = \left[ \int_a^b dx \omega(x) |e(x)|^2 \right]^{1/2}$$

O bé l'anomenada norma del màxim, que es preocupa estrictament pel valor màxim de la funció en un cert interval:

Definit un producte escalar, el pas següent és definir una norma, com l'arrel quadrada del producte d'una funció per si mateixa:

$$\|e\|_{\infty,\omega} = \max_{x \in [a,b]} \omega(x) |e(x)|$$

- [Aubanell1991] p204-p205

## 2.3.3 Famílies de polinomis ortogonals

En la sessió següent veurem com construirem l'aproximació mitjançant una combinació lineal dels elements d'una base. En l'àlgebra veiem que la comoditat en els



càlculs és important si els elements de la base són ortogonals. En particular, és interessant saber calcular famílies de polinomis ortogonals.

## Polinomis ortogonals

Una família de polinomis  $\{P_0, \dots, P_n\}$  són ortogonals si compleixen

$$\langle P_i, P_j \rangle = \delta_{ij} \|P_i\|^2$$

És a dir, si el seu producte escalar de dos elements qualsevol de la família és sempre zero, excepte quan és el mateix polinomi. Llavors recuperem la norma al quadrat. Recordant que el producte escalar de dues funcions es planteja com

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b dx \omega(x) f(x)g(x)$$

veiem com l'interval i la funció pes determinen la família ortogonal.

## Un exemple: polinomis de Legendre

Un cas habitual és aquell en el qual la funció pes és la unitat  $\omega(x) = 1$ , ponderació homogènia a tot l'interval) i l'interval de treball el  $[-1, 1]$ . Comencem per buscar els polinomis de grau 0 ( $P_0 = a$ ) i grau 1 ( $P_1 = bx+c$ ). Han de complir

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx a(bx+c) = 0$$

la qual ens dóna una condició per tres paràmetres. El problema es repeteix per als altres polinomis de la família: hem d'imposar més condicions. Una solució habitual és demanar que cada un d'ells sigui un polinomi mònic. En aquest cas no demanem que siguin mònics, però fixem:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \end{aligned}$$

i la resta segueixen la relació recursiva

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$$

Per a d'altres casos habituals, les famílies ortogonals estan tabulades. Són d'especial interès les famílies de polinomis de Laguerre, Hermite i Tchebitxev.

- [Aubanell1991] p223-p226
- [Bonet1994] p118-p119

## RESUM

---

En aquesta sessió hem presentat el problema de l'aproximació de funcions, introduït els conceptes relatius a espais de Hilbert (bases, normes, productes escalars,...) i finalment hem exposat com construir una família de polinomis ortogonals a un interval i funció pes fixats.





## SESSIÓ 6: Aproximació per mínims quadrats

### FITXA DE LA SESSIÓ

---

- ❖ Nom: Aproximació per mínims quadrats
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

---

En la sessió anterior vam introduir el problema de l'aproximació de funcions, juntament amb les dues principals normes de l'error que s'utilitzen: la norma euclidiana i la norma del màxim.

### OBJECTIUS

---

En aquesta sessió presentarem la metodologia per construir una funció aproximadora que minimitzi la norma euclidiana de l'error respecte la funció original.

### CONTINGUTS

---

Parlant dels mínims quadrats, s'exposa la forma de la funció d'error, les operacions que cal fer per minimitzar-la, i el resultat final per calcular els paràmetres de la solució.

#### 2.3.4 Mínims quadrats

---

L'objectiu d'aquest mètode és construir una funció  $f_n(x)$  que approximi la funció  $f(x)$  minimitzant la norma euclidiana del seu error,  $e(x) = f(x) - f_n(x)$ .

#### Construcció de l'aproximació

---

La funció  $f_n(x)$  la construïm a partir de la combinació lineal d'una família de funcions  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$



Per tant, conèixer la solució  $f_n(x)$  del problema equival a conèixer el valor dels coeficients 'a'.

- [Aubanell1991] p203

## Funció a minimitzar

La norma euclidiana de l'error es calcula com

$$\|e_n\|_{2,\omega} = \left( \|f - f_n\|_{2,\omega} \right)^{1/2}$$

Per comoditat, minimitzem la norma quadràtica, ja que a causa del caràcter de la funció trobem la mateixa solució:

$$\|e_n\|_{2,\omega}^2 = \langle f - f_n, f - f_n \rangle_\omega$$

Per tal de trobar el mínim, imposem l'anul·lació de les parcials de la funció error quadràtic respecte dels coeficients que volem trobar:

$$\frac{\partial \langle f - f_n, f - f_n \rangle}{\partial a_k} = 0$$

- Referència on trobar la informació: pàgina llibre, apunts, ... [Autor99]

## Equacions normals

Imposar les parcials nul·les de l'error quadràtic respecte els coeficients  $\{a_0, \dots, a_n\}$  ens porta al que anomenem equacions normals:

$$\sum_{i=0}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 0, \dots, n$$

La resolució d'aquest sistema d'equacions lineals en els coeficients ens dona els valors d'aquests per la funció aproximadora  $f_n(x)$ . Es demostra que aquest sistema té solució única per qualsevol funció a aproximar si i només si les funcions  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  són linealment independents.

- [Aubanell1991] p207-p209
- [Bonet1994] p113



## Càlcul dels coeficients

Per un conjunt particular de funcions  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ , ens podem estalviar la resolució del sistema, un problema numèricament complex i costós. Si aquestes funcions són ortogonals:

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \delta_{ik} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$$

aleshores tots els productes escalars que apareixen en les equacions normals són nuls, excepte aquells que són d'una funció amb ella mateixa. Aquest fet porta a unes equacions de resolució "directe":

$$a_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

- [Aubanell1991] p212-p213
- [Bonet1994] p113

## Interpretació algebraica

Des d'un punt de vista més algebraic, podem interpretar el conjunt de funcions  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  com una base capaç de generar l'espai en què viuen aquelles funcions que s'ha d'aproximar (d'aquí els conceptes relatius als espais de Hilbert). D'aquesta manera, els coeficients 'a' són aquells que determinen l'element del conjunt amb millor projecció sobre la funció que s'ha d'aproximar,  $f(x)$ . Igual que en l'àlgebra, els coeficients d'una combinació lineal per descompondre un element del conjunt s'obtenen mitjançant la projecció (matemàticament, un producte escalar) d'aquest element sobre els elements de la base:

$$a_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

- [Aubanell1991] p208 (vegeu especialment la figura III.1)

## Exemple de mínims quadrats

L'objectiu d'aquest exemple és aproximar la funció

$$f(x) = e^x$$

mitjançant una recta que minimitzi l'error quadràtic en l'interval  $[-1, 1]$ .

## Exemple: Aproximació contínua

L'aproximació la fem mitjançant una recta,

$$f_n(x) = f_1(x)$$



Per tant, la base de funcions tindrà dos elements que per simplicitat escollirem com  $\varphi_0 = 1$  i  $\varphi_1 = x$ . En primer lloc, comprovem que són dos elements ortogonals:

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx 1 \cdot x = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1 = 0$$

I d'aquesta manera és possible aplicar la fórmula del càlcul de coeficients a partir de la simplificació de les equacions normals a equacions de projecció:

$$a_0 = \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 dx e^x}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)$$

$$a_1 = \frac{\langle f, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 dx x e^x}{\int_{-1}^1 dx x^2} = \frac{3}{e}$$

Amb la qual cosa, l'aproximació en forma de recta que minimitza l'error quadràtic en tot l'interval és

$$f_1(x) = 1.185 + 1.10x$$

## Exemple: Aproximació discreta

Una altra opció és construir una aproximació minimitzant l'error quadràtic en un conjunt de punts. Escollim el conjunt d'abscisses

$$\left\{ -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

i mantenim la mateixa base formada per les funcions  $\varphi_0 = 1$  i  $\varphi_1 = x$ , que també són ortogonals en aquests punts:

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \sum_{k=0}^4 \varphi_0(x_k) \varphi_1(x_k) = 0$$



Els coeficients segueixen calculant-se mitjançant les fórmules de projecció:

$$a_0 = \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\sum_{k=0}^4 e^{x_k}}{\sum_{k=0}^4 1} = 1.27$$

$$a_1 = \frac{\langle f, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{\sum_{k=0}^4 x_k e^{x_k}}{\sum_{k=0}^4 x_k^2} = 1.15$$

i l'aproximació en forma de recta que minimitza l'error quadràtic en el conjunt d'abscisses

$$\left\{-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

és la funció

$$f_1(x) = 1.27 + 1.15x$$

## PROBLEMA

---

Calculeu la constant que millor aproxima la funció  $f(x) = e^x$  en l'interval  $[0,1]$ , segons la norma  $\| \cdot \|_2$ .

## PROBLEMA

---

Calculeu el polinomi de primer grau que aproxima per mínims quadrats la funció  $f(x) = \ln(1+x)$  en l'interval  $[2,4]$ . Calculeu també la recta interpolador pel mètode de Newton. Avaluant per ambdós mètodes  $\ln 4$ , discutiu quin dels dos mètodes us sembla més eficient.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem representat el primer dels dos mètodes que estudiarem en aquest curs per aproximar funcions: els mínims quadrats. Hem estudiat la forma de generar aquesta aproximació, com calcular-ne els coeficients i la seva interpretació algebraica.





## SESSIÓ 7: Aproximació minimax

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Aproximació minimax
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En la sessió anterior vam presentar una forma d'aproximar una funció, tot minimitzant l'error quadràtic: el mètode dels mínims quadrats. Anteriorment ja vam explicar que la funció a minimitzar és el que diferencia els mètodes d'aproximació.

### OBJECTIUS

En aquesta ocasió presentarem un nou mètode d'aproximació, basat en la minimització de la norma del màxim de la funció error, estudiant especialment aquells casos en què la resolució del problema és factible analíticament.

### CONTINGUTS

En primer lloc, exposem el teorema de caracterització de Txebitxev, que indica les abscisses a partir de les quals aproximar. A continuació, s'exposa la forma de calcular els coeficients de l'aproximació, i algunes de les propietats que faciliten el càlcul en casos particulars.

#### 2.3.5 Aproximació minimax

L'objectiu d'aquest mètode és construir una funció  $f_n(x)$  que approximi la funció  $f(x)$  i que permeti minimitzar la norma del màxim del seu error,  $e(x) = f(x) - f_n(x)$ .

#### Teorema de caracterització de Txebitxev

Per raons de simplicitat, estudiarem només el cas d'una funció pes unitat,  $\omega(x) = 1$ , i d'una funció aproximadora en forma de polinomi,  $p_n(x)$ . Sobre un polinomi, sabem que no pot tenir més arrels que el seu grau, tret que sigui idènticament nul. D'aquí es pot arribar a demostrar que existeixen almenys  $n+2$  abscisses

$$a \leq \xi_0 < \dots < \xi_{n+1} \leq b$$



en què el mòdul de l'error correspon a la seva norma del màxim:

$$|e_n(\xi_j)| = \|e_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |e_n(x)|$$

- [Aubanell1991] p231

## Propietats de l'error màxim

En les  $n+2$  abscisses en què l'error pren el seu valor màxim, ho fa amb alternança de signes:

$$e_n(\xi_0) = -e_n(\xi_1) = \dots = (-1)^{n+1} e_n(\xi_{n+1})$$

propietats coneguda habitualment com de l'equioscillació de l'error. Com calculem quines són aquestes abscisses? En optimitzar l'error (en són màxims o mínims, contant el signe), compliran que

$$e_n'(\xi_j) = 0$$

excepte si alguna d'elles coincideixen amb el extrems de l'interval, problemàtica que es troba en els casos de

$$\xi_0 = a \text{ o } \xi_{n+1} = b$$

Això es resolt sabent que si

$$\text{Signe}(f^{(n+1)}(x)) = \text{cnt}$$

en tot l'interval  $[a,b]$ , aleshores es demostra que

$$\begin{aligned} \xi_0 &= a \\ \xi_{n+1} &= b \end{aligned}$$

- [Aubanell1991] p231-p232

## Minimax polinomial

Hi ha un cas particularment interessant, en el qual els càlculs a realitzar són més simples: aquell en què l'objectiu és aproximar un polinomi per un altre polinomi de grau menor. Suposem que volem aproximar un polinomi

$$p_{n+1}(x)$$

per un altre

$$p_n(x)$$

A partir de les propietats dels polinomis de Tchebitxev, es demostra que l'aproximació que minimitza l'error màxim es construeix com:

$$p_n(x) = p_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}(x)$$



en què el coeficient

$$a_{n+1}$$

és el de grau més alt del polinomi de mateix grau que 'a':

$$p_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_1x + a_0$$

Aquestes expressions funcionen per al cas en què l'interval al qual s'aproxima és el  $[-1,1]$ . En cas contrari, el primer que hem de fer és un canvi de variable lineal.

- [Aubanell1991] p235

## Exemple d'aproximació minimax

L'objectiu d'aquest problema és aproximar la funció  $f(x)=\ln x$  mitjançant una recta

$$p_1(x) = \alpha x + \beta$$

que minimitzi l'error màxim en l'interval  $[1,2]$ .

## Exemple: Càlcul de les abscisses

El teorema de caracterització de Tchebitxev ens assegura l'existència d'un conjunt d'abscisses

$$a \leq \xi_0 < \dots < \xi_{n+1} \leq b$$

en les quals el mòdul de l'error és màxim. Si aproximem la funció mitjançant una recta (polinomi de grau  $n=1$ ), aleshores existeixen  $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$  amb aquesta propietat. Com el signe de la derivada d'ordre  $n+1$  és constant en  $[1,2]$ :

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$$

podem assegurar que

$$\xi_0 = 1$$

$$\xi_2 = 2$$

El punt  $\xi_1$  el trobem demanant

$$e'(\xi_1) = 0$$

i obtenim

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha}$$



## Exemple: Coeficients de l'aproximació

---

Per trobar els coeficients de la recta aproximadora pel màxim utilitzem les propietats d'equioscillació de l'error:

$$e(\xi_0) = -e(\xi_1) = e(\xi_2)$$

Resolent aquestes igualtats amb les abscisses obtingudes anteriorment s'obté

$$\alpha = \ln 2$$

$$\beta = -\frac{1}{2}[\ln 2 + \ln(\ln 2) + 1]$$

## PROBLEMA

---

Calculeu la constant que millor aproxima la funció  $f(x) = e^x$  en l'interval  $[0,1]$ , segons la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

## PROBLEMA

---

Utilitzeu les fórmules del minimax polinomial per aproximar una paràbola  $f(x) = x^2$  mitjançant una recta en l'interval  $[0,1]$ .

## RESUM

---

En aquesta sessió hem representat el primer dels dos mètodes que estudiarem en aquest curs per aproximar funcions: els mínims quadrats. Hem estudiat la forma de generar aquesta aproximació, com calcular-ne els coeficients i la seva interpretació algebraica.



## SESSIÓ 8: Integració numèrica en abscisses conegudes

### FITXA DE LA SESSIÓ

---

- ❖ Nom: Integració numèrica en abscisses conegudes
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

---

Anteriorment hem estudiat els mètodes per interpolar o aproximar el comportament d'un sistema a partir del coneixement parcial d'aquest: el valor en algun dels seus punts, la funció que caracteritza el comportament, etc.

### OBJECTIUS

---

En aquesta primera sessió dedicada a la integració numèrica, l'objectiu bàsic és presentar la manera d'actuar d'ara endavant en aquest tipus de problemes, i presentar alguns dels mètodes més simples que utilitzarem.

### CONTINGUTS

---

En primer lloc estudiarem els dos mètodes més bàsics (Trapezis i Simpson), que generalitzarem en les fórmules d'integració interpolatòria per un interval. Finalment, presentarem les fórmules de Newton-Cotes com l'aplicació de les anteriors en intervals compostos.

## 3 Integració numèrica

### 3.1 Integració en abscisses donades

---

#### 3.1.1 Regles dels Trapezis i Simpson

---

Aquestes regles impliquen el càlcul aproximat d'una integral a partir de l'aproximació de la funció a integrar per polinomis de grau baix.



## Regla dels Trapezis

En un interval  $[a,b]$ , una primera aproximació és interpolar la funció  $f(x)$  a integrar per una recta:

$$p_1(x) = f(a) \frac{x-b}{b-a} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

En aquesta aproximació cometem un error igual a l'error d'interpolació:

$$e_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} |(x-a)(x-b)|$$

Per tant, la integral es calcula de la forma:

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx (p_1(x) + e_1(x)) = \dots = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

És important fixar-se que l'error va com el cub de l'amplada de l'interval. Aquesta potència ens donarà, pels diferents mètodes, l'ordre de magnitud de l'error.

- [Aubanell1991] p337-p338 (vegeu especialment la figura IV.2)
- [Bonet1994] p142

## Regla de Simpson

Una altra opció que en un principi ens donaria més precisió seria interpolar la funció  $f(x)$  a l'interval d'integració  $[a,b]$  per una paràbola, amb la qual cosa necessitariem el valor d'aquesta funció en un tercer punt. Escollint com a tercer punt el punt mitjà de l'interval,

$$\frac{a+b}{2}$$

i interpolant per un polinomi d'ordre 2, la fórmula d'integració que s'obté és:

$$\int_a^b dx f(x) = \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$$

en què  $h$  és la distància entre les abscisses d'integració,

$$h = \frac{(b-a)}{2}$$

Així com al mètode dels Trapezis hi ha un interval d'amplada  $h$  entre  $a$  i  $b$ , aquí en tenim dos.



És interessant notar com la potència de l'interval en l'error és dos ordres superior que en el cas dels Trapezis. Això ens diu que l'error d'aquesta fórmula és menor que la de Trapezis.

- [Aubanell1991] p335-p337
- [Bonet1994] p142

### 3.1.2 Integració interpolatòria

Les regles estudiades anteriorment són casos particulars d'una metodologia molt més extensa: interpolat per un polinomi de grau  $n$  la funció a integrar, i obtenir una fórmula aproximadora a partir dels valors de la funció en certes abscisses.

#### Fórmula d'integració interpolatòria

En general, el mètode s'aplica a l'interval  $[a, b]$  a partir d'un conjunt d'abscisses  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Se substitueix la funció a integrar per un polinomi  $p_n(x)$  interpolat (per exemple, amb el mètode de Lagrange):

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$

D'aquesta manera, la fórmula d'integració aproximada és

$$\int_a^b dx f(x) \approx \int_a^b dx \left[ \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) \right] = \sum_{k=0}^n \Delta_k f(x_k)$$

en què els coeficients  $\Delta$  es calculen com

$$\Delta_k = \int_a^b dx L_k(x) = \int_a^b dx \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

És a dir, aquests coeficients no depenen de la funció  $f(x)$  que s'ha d'integrar, sinó només de les abscisses d'integració.

- [Aubanell1991] p334

#### Error de la integració interpolatòria

En general, interpolant  $f(x)$  per un polinomi  $p_n(x)$  es comet un error

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$



amb la qual cosa podem escriure la fórmula de l'error interpolatori per un grau  $n$  qualsevol:

$$|e_n| \leq \frac{\max_{x \in [a,b]} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b dx |(x-x_0) \cdots (x-x_n)|$$

Particularitzant per  $n=1$  i  $n=2$  s'obtenen les fórmules d'error de Trapezis i Simpson.

- [Aubanell1991] p336

### 3.1.3 Fórmules de Newton-Cotes

Habitualment, les abscisses que s'utilitzen per integrar en un cert interval són punts equiespaiats, amb la qual cosa s'obtenen unes fórmules amb propietats interessants, anomenades de Newton-Cotes, i de les quals estudiem directament els casos compostos.

#### Fórmules d'integració compostes

La metodologia és la mateixa que en els casos anteriors, amb la diferència que en aquest cas s'aplica a cada un dels subintervalls amb què dividim  $[a,b]$ . És a dir, amb les abscisses  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  dividim l'interval d'integració en  $n$  subintervalls, i en cada un d'ells utilitzem una fórmula interpolatòria de grau  $m$ :

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \Delta_k f(x_{k+(j-1)m})$$

L'interès rau en el fet que els coeficients  $\Delta$  ara ni tan sols depenen de les abscisses d'integració. Per un interval  $[a,b]$  qualsevol:

$$\Delta_k = \int_a^b dx L_k(x) = \int_a^b dx \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = h \int_0^n dt \prod_{j \neq k} \frac{t - j}{k - j} \equiv h \alpha_k$$

veiem com els coeficients  $\alpha$  tan sols depenen de l'interval inicial  $[a,b]$  i de l'ordre de l'aproximació,  $n$ .

#### Trapezis i Simpson compostos

Particularitzant les fórmules anteriors per als casos més simples, obtenim els següents resultats: per al cas de Trapezis (és a dir, dividim en  $n$  subintervalls i interpolem per una recta la funció que s'ha d'integrar en cada un d'aquests intervals), la fórmula d'integració és:



$$I_T = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

i l'error comès

$$e_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

Pel que fa a Simpson (interpolació amb paràboles a cada subinterval), obtenim

$$I_S = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

amb un error donat per l'expressió

$$e_S = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(iv)}(\xi)$$

Aquí cal remarcar que tenim  $n$  intervals d'amplada  $h$ , agrupats en  $n/2$  paràboles d'amplada  $2h$ . Dit d'una altra manera,  $h$  és la distància entre punts, no l'amplada de les paràboles.

- [Aubanell1991] p339-p340
- [Bonet1994] p147-p148 (vegeu especialment la taula 1)

## PROBLEMA

---

Demostra, sense fer servir la fórmula de l'error, que la integració per Trapezis és exacta si la funció que s'ha d'integrar és una recta, i la integració per Simpson ho és si la funció que s'ha d'integrar és un polinomi cúbic. Justifica com pot ser aquesta darrera afirmació, si Simpson interpola només per una paràbola cada interval d'integració.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem presentat els mètodes més senzills d'integració numèrica (Trapezis i Simpson) com a casos particulars de la integració interpolatòria. Finalment, hem generalitzat aquests conceptes a la integració composta.





## SESSIÓ 9: Integració gaussiana

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Integració gaussiana
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En la sessió anterior vam presentar les fórmules d'integració corresponents a aquells mètodes en què les abscisses en les quals interpolem la funció són conegudes, sovint equiespaiades.

### OBJECTIUS

En aquesta estudiarem de quina manera podem escollir les abscisses d'integració per tal que la fórmula que obtinguem tingui el menor error possible respecte del resultat exacte.

### CONTINGUTS

En primer lloc presentem les abscisses d'error mínim, i sobretot com calcular-les a través dels polinomis ortogonals al problema. A continuació, mostrem com es transformen les fórmules d'integració en realitzar la interpolació en aquests punts.

## 3.2 Integració gaussiana

### 3.2.1 Abscisses d'integració gaussiana

L'objectiu és trobar un conjunt d'abscisses  $\{x_k\}$  per interpolar la funció que s'ha d'integrar de manera que el resultat sigui exacte per al major nombre possible de funcions que cal integrar:

$$\int_a^b dx \omega(x) f(x) = \sum_{k=0}^n \Delta_k f(x_k)$$



## Càlcul de les abscisses

Per a qualsevol funció pes  $\omega(x)$  i interval  $[a,b]$ , existeix un conjunt d'abscisses  $\{x_0, \dots, x_n\}$  que assegurin que la fórmula

$$\int_a^b dx \omega(x) f(x) = \sum_{k=0}^n \Delta_k f(x_k)$$

és exacta per a polinomis de grau igual o menor a  $2n+1$ , és a dir, per a

$$f(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}$$

Aquestes abscisses són les arrels del polinomi de grau  $n+1$  de la família de polinomis ortogonals del problema.

És interessant observar d'entrada el guany respecte de les fórmules d'integració en abscisses equiespaiades, per les quals  $n+1$  punts implicava en general exactitud del càlcul per  $f(x) \in \mathcal{P}_n$ .

- [Aubanell1991] p347-p349
- [Bonet1994] p154-p155

## Polinomis ortogonals del problema

Igual que passava en d'altres mètodes desenvolupats ja en aquest curs, una funció pes  $\omega$  i un interval determinen una família de polinomis ortogonals. La família  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$  compleixen

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b dx \omega(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Aquest fet ens porta a una conclusió important: les abscisses no depenen de la funció que s'ha d'integrar en cada problema, tan sols de l'interval i de la funció pes. Per aquest motiu, les famílies de polinomis corresponents a les funcions pes i intervals més típics estan tabulades.

- [Bonet1994] p153-p154

### 3.2.2 Fórmules d'integració

És important tenir clar que aquesta metodologia és anàloga a qualsevol altre mètode d'integració numèrica presentat fins al moment, amb l'única diferència de com escollir les abscisses d'integració.



## Càlcul dels coeficients

Dit d'una altra manera, la fórmula que utilitzem segueix sent

$$\int_a^b dx \omega(x) f(x) = \sum_{k=0}^n \Delta_k f(x_k)$$

amb  $\{x_k\}$  les abscisses d'integració gaussianes, i amb els coeficients  $\Delta$  calculats com habitualment, a partir dels polinomis de Lagrange:

$$\Delta_k = \int_a^b dx \omega(x) L_k(x)$$

Una altra manera de calcular aquests coeficients  $\Delta$  és plantejant la fórmula general imposant exactitud per polinomis de grau  $2n+1$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \omega(x) 1 &= \sum_{k=0}^n \Delta_k 1 \\ \int_a^b dx \omega(x) x &= \sum_{k=0}^n \Delta_k x_k \\ &\vdots \\ \int_a^b dx \omega(x) x^{2n+1} &= \sum_{k=0}^n \Delta_k x_k^{2n+1} \end{aligned}$$

- [Aubanell1991] p348-p351
- [Bonet1994] p154

## Error de la integració gaussiane

En el fons, la integral s'aproxima interpolant la funció que s'ha d'integrar per un polinomi construït a partir de les abscisses calculades com anteriorment s'ha exposat. A partir de l'error d'aquesta interpolació podem calcular l'error de la fórmula d'integració, i arribem a una expressió:

$$e_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \frac{1}{A_{n+1}^2} \langle \varphi_{n+1}, \varphi_{n+1} \rangle$$

en què  $A_{n+1}$  és el coeficient del terme de grau més alt del polinomi  $\varphi_{n+1}$ .

- [Aubanell1991] p349-p350
- [Bonet1994] p155-p156



## PROBLEMA

---

Calculeu el valor aproximat de la funció de distribució gaussiana normalitzada a  $x = -1$ , donada per la integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} dx e^{-x^2/2}$$

mitjançant una fórmula d'integració gaussiana de dos punts.

## PROBLEMA

---

En la fórmula d'integració

$$\int_{-1}^1 dx f(x) \approx f(\alpha) + f(-\alpha)$$

calculeu el valor del paràmetre  $\alpha$  si ha de ser exacta per polinomis de grau  $\leq 2$  o per polinomis de grau  $\leq 3$ .

## RESUM

---

En aquesta sessió hem desenvolupat la metodologia gaussiana d'integració, que consisteix a integrar numèricament una interpolació polinòmica de la funció que s'ha d'integrar, a partir de les abscisses gaussianes.



## SESSIÓ 10: Mètodes d'acceleració

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Mètodes d'acceleració
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 3 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En les dues sessions anteriors a aquesta hem establert diferents metodologies per calcular numèricament integrals definides. En totes elles, hem estudiat la corresponent fórmula que ens proporciona informació sobre l'error comès a partir del número d'interval amb què es realitza el càlcul.

### OBJECTIUS

L'objectiu d'aquesta sessió és estudiar diferents formes de millorar la precisió del càlcul realitzat, a partir de l'estudi de l'error comès.

### CONTINGUTS

En primer lloc mostrarem de quina manera s'acostuma a calcular el número d'intervals òptims per al problema en qüestió. A continuació, desenvoluparem dues maneres d'estudiar l'error i com millorar l'aproximació realitzada (Euler-Maclaurin i Richardson).

## 3.3 Mètodes d'acceleració

### 3.3.1 Estimació del pas

Estudiem, en primer lloc, de quina manera s'estableix el valor del pas o amplada de l'interval ( $h$ ) en un mètode d'integració numèric a partir de la precisió buscada.

#### Estimació del residu

Si suposem que volem el resultat amb una certa precisió  $\varepsilon$ , imposarem que el mòdul del residu o error sigui menor que  $\varepsilon/2$ . Per exemple, en el cas del mètode dels Trapezis:

$$|e_n|_T \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max|f''(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$



## Doble computació

A la pràctica, és difícil d'avaluar el valor de la derivada que apareix en la fórmula de l'error. Per això, s'acostuma a avaluar per un número d'interval·ls  $n$  i  $2n$  successivament, i s'atura quan es compleix que

$$|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$$

en què  $\varepsilon$  segueix sent la precisió desitjada. En cas que aquesta relació sigui certa, s'utilitza  $2n$  com a número d'interval·ls.

## 3.3.2 Fórmula d'Euler-Maclaurin

Sabem que l'error de les fórmules d'integració depèn de l'ordre d'una certa potència del pas  $h$ . Intentant desenvolupar aquest error en sèrie de potències de  $h$ , obtenim una forma per fer un estudi sobre com corregir el resultat aproximat obtingut, en funció dels anomenats números de Bernoulli.

## Números de Bernoulli

Si intentem desenvolupar en sèrie de potències la funció  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

obtenim la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

en què  $B_n$  són els anomenats números de Bernoulli, els primers valors dels quals són

$$\begin{array}{l} B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \\ B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \end{array}$$

Aquests valors apareixen sovint en alguns desenvolupaments en sèrie, com passa en el cas que exposem a continuació.

- [Aubanell1991] p280 (enunciat problema III.11)
- [Bonet1994] p149



## Fórmula d'Euler-Maclaurin per Trapezis

En general, podríem demostrar que l'error en una fórmula d'integració numèrica interpolatòria admet una descomposició en potències del pas  $h$ . Particularitzant pel mètode dels Trapezis, es compleix (sota certes condicions):

$$T_n - \int_a^b dx f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

Aquesta expressió ens permet corregir l'error comès tot afegint al resultat aproximat obtingut per  $T_n$  els primers termes de la sèrie de l'error.

- [Aubanell1991] p343
- [Bonet1994] p149-p150

### 3.3.3 Extrapolació de Richardson

Una altra forma d'actuar és intentar cancel·lar els primers termes de l'error amb diferents avaluacions d'un cert mètode. Per tal de fer-ho, necessitem informació sobre la dependència funcional de l'error respecte la sèrie de potències de  $h$ .

### Un exemple per Trapezis

Pel cas dels Trapezis, la fórmula de Euler-Maclaurin ens indica que podem desenvolupar l'error comès en potències parells del pas  $h$ :

$$\int_a^b dx f(x) = T_h + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \dots$$

Si repetim el càlcul per un número doble d'interval·ls,

$$\int_a^b dx f(x) = T_{h/2} + \frac{a_2}{4} h^2 + \frac{a_4}{16} h^4 + \dots$$

Calculant un terç de la diferència entre quatre vegades la fórmula anterior (amb un pas  $h/2$ ) i la primera (amb un pas  $h$ ), obtenim

$$\int_a^b dx f(x) = \frac{1}{3} [4T_{h/2} - T_h] + b_4 h^4 + \dots$$

És a dir, obtenim una avaluació de la integral amb un error menor, de l'ordre  $h^4$ .

- [Bonet1994] p151



## Extrapolació per Trapezis

L'operació anterior es pot generalitzar diverses vegades, amb els coeficients necessaris per eliminar els termes següents de l'error. A canvi, cada cop és necessari calcular l'aproximació per una amplada de l'interval la meitat que l'anterior. El càlcul es fa seguint un esquema com el següent:

$$\begin{array}{rcl}
 T_h & \dots & \\
 & & \frac{4T_{h/2} - T_h}{3} \equiv T_{h/2}^1 \quad \dots \\
 T_{h/2} & \dots & \frac{16T_{h/4} - T_{h/2}}{15} \equiv T_{h/4}^2 \\
 & & \frac{4T_{h/4} - T_{h/2}}{3} \equiv T_{h/4}^1 \quad \dots \\
 T_{h/4} & \dots &
 \end{array}$$

I la fórmula general, per un pas  $k$ , és igual a:

$$T_{h/2^i}^k = \frac{4^k T_{h/2^i}^{k-1} - T_{h/2^{i-1}}^{k-1}}{4^k - 1}$$

- [Aubanell1991] p363-p364
- [Bonet1994] p151-p152

## PROBLEMA

Volem calcular la integral  $\int_0^1 dx e^{-x^2}$  amb un error menor que 0.0001. Calculeu quina ha

de ser l'amplada de l'interval si utilitzarem el mètode dels Trapezis corregit amb el primer terme de la fórmula d'Euler-Maclaurin. Quants intervals hauríeu d'utilitzar si busquéssiu la mateixa precisió amb el mètode dels Trapezis sense corregir?

## PROBLEMA

Repetiu el problema anterior, sobre la integral  $\int_0^1 dx e^{-x^2}$ , utilitzant l'extrapolació de

Richardson amb el mètode dels Trapezis calculat per  $n=2$ ,  $n=4$  i  $n=8$ . Quina conclusió en traieu?

## RESUM

En aquesta sessió hem presentat dues metodologies per a corregir el càlcul aproximat mitjançant el mètode dels Trapezis: la fórmula d'Euler-Maclaurin i l'extrapolació de Richardson. La filosofia d'ambdós mètodes és vàlida per a qualsevol altra fórmula d'integració interpolatòria.



## SESSIÓ 11: Integració impròpia

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Integració impròpia
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Aubanell1991]
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

Els mètodes descrits en les sessions anteriors ens permeten calcular de forma aproximada integrals definides, per intervals  $[a,b]$  finits i funcions fitades.

### OBJECTIUS

En els casos de les integrals impròpies, un dels dos requeriments no es compleixen: les funcions poden no ser fitades (impròpies de segona espècie) o bé tenir límits d'integració no finits (impròpies de primera espècie). L'objectiu és conèixer quins mètodes utilitzar en aquests casos.

### CONTINGUTS

En primer lloc exposarem les metodologies que permeten integrar numèricament integrals impròpies de primera espècie, tant les basades en canvis de variable com aquelles en què es menysprea una part de la integral. A continuació seguirem el mateix esquema per a les de segona espècie.

## 3.4 Integrals impròpies

### 3.4.1 Impròpies de primera espècie

Les integrals impròpies de primera espècie són aquelles en què un límit d'integració és infinit:

$$\int_a^{\infty} dx f(x)$$

Suposarem que les integrals que s'han de calcular tenen un valor finit (és a dir, són convergents), i que per tant les funcions que s'han d'integrar compleixen la condició necessària de convergència:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



## Canvi de variable

Una opció per salvar el problema provocat pel límit infinit (si el límit és infinit, en quants subintervalls dividim l'interval d'integració?) és fer un canvi de variable que porti la integral a tenir uns límits d'integració finits. Si fem

$$t = e^{-x}$$

$$dx = -\frac{1}{t} dt$$

la integral es transforma de la següent manera:

$$\int_a^\infty dx f(x) = \dots = \int_0^{e^{-a}} dt \frac{f(-\ln t)}{t}$$

És bo adonar-nos que tan sols hem transformat el problema, doncs malgrat tenir un interval finit la funció que s'ha d'integrar té una asymptota vertical en  $t=0$  (integral de segona espècie).

## Pas al límit

Una altra estratègia consisteix a menysprear el valor de la integral més enllà d'un cert punt  $x_{n+1}$ . És a dir, analíticament calcularíem

$$\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx f(x)$$

però numèricament no podem fer un límit. Per això, una opció és aproximar el límit per

$$\int_a^\infty dx f(x) \approx \int_a^{x_{n+1}} dx f(x)$$

menyspreant

$$\int_{x_{n+1}}^\infty dx f(x)$$

## Exemple: Pas al límit en primera espècie

Suposem que volem calcular numèricament la integral

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2}$$



amb una precisió de sis xifres significatives. L'objectiu és trobar el valor de  $k$  que ens asseguri que l'aproximació

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \approx \int_0^k dx e^{-x^2}$$

comet un error menor que aquesta precisió. Analíticament podem trobar una fita superior per la quantitat menyspreada:

$$\int_k^{\infty} dx e^{-x^2} \leq \int_k^{\infty} dx e^{-kx} = \frac{e^{-k^2}}{k}$$

Per exemple, amb  $k=4$ , el terme menyspreadat és de l'ordre  $10^{-8}$ . Per tant, no introduïm un error apreciable per a la resolució del problema si aproximem

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \approx \int_0^4 dx e^{-x^2}$$

### 3.4.2 Impròpies de segona espècie

Les integrals de segona espècie són aquelles en què la funció que s'ha d'integrar conté una singularitat tipus asymptota vertical a l'interior de l'interval d'integració. Per simplicitat i sense que això signifiqui perdre generalitat, considerarem l'asímtota en un dels límits de la integral.

#### Singularitat aparent

Mètodes a banda, és bo recordar que de vegades, i malgrat que aparentment ho sembli, la funció no té cap asímtota en l'interval d'integració. És a dir, és important comprovar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

en què  $a$  és el punt en el qual la funció té l'asímtota. Un exemple típic seria la funció

$$\frac{\sin x}{x}$$

que aparentment té una singularitat en  $x = 0$ , malgrat que es comprova com

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



## Pas al límit

Igual que en la integració d'impròpies de primera espècie, en aquest cas també el pas al límit és la tècnica més utilitzada. Si suposem que la singularitat de la funció que s'ha d'integrar és a  $x = a$ , i  $c$  és un punt molt proper a aquest valor, la integral l'aproximarem per

$$\int_a^b dx f(x) \approx \int_c^b dx f(x)$$

i per tant menyspreant

$$\int_a^c dx f(x)$$

## Exemple: Pas al límit en segona espècie

Suposem que volem calcular la integral

$$\int_0^1 dx \frac{g(x)}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

I sabem que el mòdul de  $g(x)$  és menor o igual que 1. D'aquesta manera, i recordant que a l'interval  $[0,1]$  es compleix

$$\sqrt{x} \leq \sqrt[3]{x}$$

la quantitat menyspreada per un valor  $c$  qualsevol es fita per:

$$\left| \int_0^c dx \frac{g(x)}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \right| \leq \left| \int_0^c dx \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^c dx \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{c}$$

Amb la qual cosa, si per exemple la precisió la volem amb quatre xifres decimals, en tenim prou amb  $\text{error} \leq 5 \cdot 10^{-5}$ . D'aquest  $5 \cdot 10^{-5}$  hem de decidir quina part assignem a l'error de truncament de l'interval i quina part a l'error propi del mètode (Trapezis, Simpson, etc.). Una decisió pot ser assignar la meitat de l'error a cada causa, encara que hi poden haver repartiments millors en funció del problema. En aquest cas,  $\sqrt{c} \leq 2.5 \cdot 10^{-5}$   $c \leq 6.25 \cdot 10^{-10}$

Qualsevol valor de  $c$  menor que aquest nombre ens provocarà un error menor que  $2.5 \cdot 10^{-5}$  i, si el mètode d'integració que usem també té un error menor que aquest valor, l'error total serà menor que  $5 \cdot 10^{-5}$ .



## RESUM

---

En aquesta sessió hem desenvolupat aquelles tècniques que ens poden ser útils, coneixent els mètodes anteriorment exposats, per a poder aproximar el valor d'una integral impròpia, tant de primera com de segona espècie





## SESSIÓ 12: Resolució d'EDOs (mètode simples)

### FITXA DE LA SESSIÓ

---

- ❖ Nom: Resolució d'EDOs (mètode simples)
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

---

En les sessions anteriors a aquesta hem estudiat les metodologies necessàries per resoldre problemes de propagació d'errors, d'interpolació i aproximació, així com d'integració numèrica.

### OBJECTIUS

---

En aquesta sessió introduïrem els principis per tal de resoldre equacions diferencials ordinàries (EDOs). L'objectiu és presentar els mètodes més simples que, no obstant la seva simplicitat, comparteixen la mateixa filosofia que d'altres més complexes que presentarem en les sessions següents.

### CONTINGUTS

---

En primer lloc presentarem el problema general, i a continuació exposarem l'aproximació d'ordre més baix, el que anomenem el mètode d'Euler, consistent per aproximar la solució que busquem de forma lineal. A continuació exposarem una aproximació d'ordre superior, coneguda com el mètode de Taylor.

## 4 Resolució d'equacions diferencials ordinàries

---

### 4.1 Mètodes simples d'un pas

---

#### 4.1.1 Plantejament del problema

---

Quins són exactament els problemes que serem capaços de resoldre amb els mètodes que exposarem? Són els anomenats generalment problemes de Cauchy o de valors inicials.



## Problema de Cauchy

S'anomena d'aquesta manera al problema que intentarem resoldre: aquell en el qual tenim plantejada una equació diferencial de primer ordre i coneixem el valor de la solució en un punt  $x = a$ , coneguda com condició inicial o de contorn. El problema generalment s'escriu com

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

L'objectiu és conèixer el valor de la solució  $y(x)$  del problema en un conjunt de punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ , que per comoditat suposarem equiespaiats:

$$x_j = a + jh$$

amb  $h$  l'amplada entre cada punt, anomenat també pas del problema:

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$x_0 = a$$

$$x_n = b$$

- [Bonet1994] p229-p230

### 4.1.2 Mètode d'Euler

El mètode d'Euler presenta l'aproximació més senzilla que li podem fer a la funció solució: aproximar-la de forma lineal, a partir del coneixement de la solució en el punt  $x = a$ .

#### Aproximació lineal

Volem calcular el valor de la funció solució en els punts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . En el primer interval,  $[x_0, x_1]$ , podem aproximar la funció per una recta sabent el valor en el punt  $x = x_0 = a$ :

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Aquesta recta ens permet calcular la solució aproximada en el punt  $x_1$ :

$$y(x_1) \approx y(x_0) + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)h = y_1$$

- [Bonet1994] p230-p231 (especialment la figura 2)



## Recursivitat del mètode

L'aproximació obtinguda pel valor de la solució en el punt  $x_1$  pot ser utilitzada, de la mateixa forma, per a trobar una aproximació al valor de la solució en  $x_2$ , i així successivament. La solució general pel mètode d'Euler s'escriu com:

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

És essencial observar com cada iteració la construïm a partir de l'aproximació anterior, que per la seva banda també l'hem trobada a partir de l'aproximació en el punt anterior, etc. Per aquest motiu, l'error anirà augmentant a mesura que ens allunyem del punt inicial,  $x_0$ .

- [Bonet1994] p231

## Tria del pas

En principi, com en tot mètode iteratiu, esperariem que disminuir el pas  $h$  (és a dir, la distància entre abscisses) millorés la precisió del mètode. Ara bé, disminuir el pas  $h$  també implica augmentar el nombre de càlculs  $i$ , per tant, augmentar l'error d'arrodoniment. Aquests dos fets combinats porten a l'existència d'allò que anomenem un pas òptim, compromís entre aquests dos factors.

- [Bonet1994] p232 (figura 3)

### 4.1.3 Mètode de Taylor

Una segona opció dins d'aquests mètodes més senzills per resoldre una EDO és aproximar en cada interval la solució per una paràbola, aprofitant el fet que disposem de la primera derivada (donada directament per l'equació diferencial, malgrat que estigui en funció de  $x$  i de la mateixa  $y(x)$ ).

## Càlcul de la segona derivada

L'equació diferencial ens proporciona el valor de la primera derivada de la funció que busquem, en funció de la variable  $x$  i d'ella mateixa,  $y(x)$ :

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Aplicant la regla de la cadena, podem expressar la segona derivada com:

$$y''(x_0) = \frac{d}{dx} y'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + y'(x_0) \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$$

- [Bonet1994] p235



## Fórmula de Taylor

Coneixent la segona derivada a partir de les coordenades de cada punt, anàlogament al mètode d'Euler, podem establir una aproximació, en aquest cas d'ordre 2, per la funció solució en  $[x_0, x_1]$ :

$$y(x) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right]$$

D'aquí arribem a la fórmula iterativa del mètode de Taylor:

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y_n) \right] \end{cases}$$

Com és d'esperar, pel fet que en aquest cas l'aproximació de la funció és d'ordre superior a la d'Euler, la precisió aconseguida per Taylor és superior a la d'Euler, a igualtat de pas.

- [Bonet1994] p235-p236

## Exemple comparatiu: mètodes d'Euler i Taylor

Compararem l'eficàcia dels dos mètodes a partir del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicant la fórmula d'Euler, i tenint present que en aquest cas  $f(x_n, y_n) = y_n$ , obtenim

$$y_{n+1} = y_n(1+h)$$

En canvi, si calculem les parcials de la funció  $f$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

i apliquem el mètode de Taylor, s'obté un mètode iteratiu de major precisió, doncs es veu clarament que incorpora termes de grau superior:

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 + h + \frac{h^2}{2} \right)$$

Per un pas  $h = 0.5$ , obtenim els següents resultats amb els quals efectivament observem el guany de precisió al passar d'Euler a Taylor (dades amb dos xifres significatives):



$x_n$	$y(x_n)$	$y_n$ Euler	Error Euler	$y_n$ Taylor	Error Taylor
0.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0
0.5	1.65	1.50	0.15	1.62	0.03
1.0	2.72	2.25	0.47	2.64	0.08

## PROBLEMA

---

La probabilitat que una variable gaussiana estigui entre  $(-\infty, -1)$  es calcula a partir de la integral de la seva funció de distribució. Si definim  $g(x)$  com

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dt e^{-t^2/2}$$

aquesta probabilitat és  $g(-1)$ . Calcula aquest valor de  $g(x)$  amb els mètodes d'Euler i Taylor amb  $h = 0.5$ . Compara'n el resultat obtingut i la precisió d'ambdós mètodes amb el resultat exacte amb una taula de la gaussiana.

## RESUM

---

En aquesta sessió hem presentat el problema a resoldre, i hem proposat els dos mètodes més simples, Euler i Taylor. En ambdós s'aproxima la solució de forma polinomial (recta en Euler i paràbola en Taylor), i finalment hem comprovat com el segon és més precís que el primer.





## SESSIÓ 13: Tractament de l'error en la resolució d'EDOs

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Tractament de l'error en la resolució d'EDOs
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En la passada sessió vam presentar els mètodes més simples de resolució d'equacions diferencials. Havent presentat el problema i la metodologia, vam observar com la precisió augmenta quan ho fa el grau de l'aproximació, però sense cap tractament teòric de l'error.

### OBJECTIUS

L'objectiu d'aquesta sessió és estudiar com es pot fer un tractament sistemàtic de l'error en un mètode d'un pas, com els que vam exposar en la sessió anterior (Euler i Taylor) i els que estudiarem més endavant.

### CONTINGUTS

En primer lloc, definirem què és un mètode d'un pas per resoldre una equació diferencial. A continuació, presentarem l'ordre d'un mètode com a mesura de l'error que es comet, i finalment estudiarem quin és l'ordre dels mètodes ja presentats.

#### 4.1.4 Ordre d'un mètode

El concepte d'ordre d'un mètode ens permetrà estudiar quin és l'ordre de magnitud de l'error per tots aquells mètodes iteratius de resolució d'un pas.

#### Mètodes d'un pas

Definim un mètode d'un pas com aquell mètode recursiu que calcula la solució en una abscissa a partir de la solució calculada en l'abscissa anterior, amb una correcció proporcional al pas  $h$  del problema:

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \end{cases}$$



en què recordem que  $h$  es calcula com

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Per tots els diferents mètodes iteratius, la única diferència ve donada per la funció  $\Phi(x,y,h)$ . Així, per exemple el mètode d'Euler és un mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y)$$

mentre que el mètode de Taylor també és un mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right]$$

- [Bonet1994] p229-p230

## Ordre global d'un mètode

En el fons, els mètodes d'un pas estudiats es basen en l'aproximació, en major o menor ordre, de la funció solució per un polinomi. Saber fins a quin ordre s'ha aproximat la funció solució pot ser una mesura de l'exactitud del mètode. Doncs bé, es diu que l'ordre global d'un determinat mètode és  $p$  si en avançar un pas, la solució calculada es comporta com

$$h^{p+1}$$

És a dir,

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y, h) = O(h^{p+1})$$

Aquesta definició equival a comprovar que

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \right| \propto h^p$$

Per realitzar el càlcul de l'ordre del mètode amb aquesta expressió, es desenvolupa  $y(x+h)$  per Taylor al voltant de  $h=0$ . Aquest càlcul és general per a qualsevol mètode d'un pas.

- [Bonet1994] p230-p231 (especialment la figura 2)

### 4.1.5 Tractament de l'error

En el tractament a partir de l'ordre del mètode no s'hi inclou l'efecte de l'error d'arrodoniment, que ja havíem vist anteriorment com provoca un augment de l'error a partir del moment en què es traspassa un cert pas òptim.



## Ordre del mètode d'Euler

El mètode d'Euler ve definit recursivament per

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

Per tant, és un mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y)$$

Utilitzant la sèrie de potències per Taylor de la funció  $y(x+h)$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \dots$$

i substituint-la a l'expressió de l'ordre del mètode obtenim el següent:

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \right| = \left| \frac{y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \dots - y(x)}{h} - f(x, y) \right| = \left| \frac{1}{2}y''(x)h + \dots \right| \propto h^1$$

Per tant, diem que el mètode d'Euler és un mètode d'ordre global 1.

- [Bonet1994] p235

## Ordre del mètode de Taylor

El mètode de Taylor també és un mètode d'un pas, doncs la fórmula recursiva és

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right] \end{cases}$$

i per tant s'adapta al que hem definit com a mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right]$$



Desenvolupant de nou l'expressió que ens dóna idea de l'ordre del mètode:

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \right| = \left| \frac{y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x)h^3 \dots - y(x)}{h} - \left[ f(x, y) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right] \right] \right| = \dots = \left| \frac{1}{6}y'''(x)h^2 + \dots \right| \propto h^2$$

amb la qual cosa podem afirmar que el de Taylor és un mètode d'ordre global 2. Aquest resultat justifica el que ja vam observar anteriorment, quan Euler donava un error d'aproximació sempre superior al de Taylor.

- [Bonet1994] p235-p236

## RESUM

---

En aquesta sessió hem definit què és un mètode d'un pas, i hem vist com els mètodes recursius exposats fins ara ho són. A continuació hem definit l'ordre del mètode i hem vist com aquesta magnitud ens permet analitzar l'error comès per cadascun d'aquests mètodes, justificant el perquè l'error donat per Taylor és menor que el donat per Euler.



## SESSIÓ 14: Mètodes de Runge-Kutta

### FITXA DE LA SESSIÓ

- ❖ Nom: Mètodes de Runge-Kutta
- ❖ Tipus: teòrica
- ❖ Format: no presencial
- ❖ Durada: 2 hores
- ❖ Dedicació: 2 hores
- ❖ Material:
  - Bibliografia bàsica:
    - [Bonet1994]
  - Bibliografia complementària:
    - [Martorell2001c]

### PRECEDENTS

En les dues anteriors sessions hem presentat els mètodes d'un pas més simples per a resoldre equacions diferencials ordinàries, així com la forma d'estudiar l'error que es produeix en l'aproximació de la funció solució.

### OBJECTIUS

En aquesta sessió presentarem la manera de, a partir d'unes expressions generals, construir mètodes de resolució d'equacions diferencials ordinàries d'ordre global arbitrari.

### CONTINGUTS

En primer lloc exposarem les relacions generals dels mètodes de Runge-Kutta. Després particularitzarem per diferents ordres globals i estudiarem les expressions recursives del mètodes més utilitzades per resoldre numèricament EDOs.

## 4.2 Mètodes de Runge-Kutta

### 4.2.1 Els mètodes de Runge-Kutta

Els mètodes de Runge-Kutta són mètodes d'un pas construïts a partir d'una expressió general particularitzant l'ordre global del mètode que es vol assolir.

### Fórmula recursiva general

La fórmula general dels mètodes de Runge-Kutta expressa recursivament com trobar la solució en un punt a partir del coneixement de la solució en el punt anterior:

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k c_i K_i^n \end{cases}$$



El superíndex  $k$ , que expressa quants termes incloem al sumatori que multiplica el pas  $h$  és el que determina quin Runge-Kutta utilitzem. Els paràmetres  $K$  es calculen recursivament mitjançant les expressions:

$$\begin{cases} K_1^n = f(x_n, y_n) \\ K_i^n = f\left(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^n\right) \end{cases}$$

Diferents aspectes són interessants d'aquestes expressions: d'entrada, en l'expressió dels  $K_i^n$  es pot observar com per calcular-lo és necessari tots els  $K_j^n$  anteriors (recursivitat de l'expressió). D'altra banda, el superíndex d'aquests paràmetres indica la necessitat de tornar a calcular-los a cada pas.

- [Bonet1994] p229-p230

## Càlcul dels coeficients $a$ , $b$ i $c$

En les expressions de Runge-Kutta, independentment de quin valor de  $k$  s'utilitzi, apareixen uns coeficients  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Aquest conjunt de coeficients són calculats per aconseguir que el mètode en qüestió tingui ordre global màxim, segons el definit anteriorment. D'aquesta manera, parametritzem la possibilitat de treballar amb mètodes aproximats de la potència desitjada, tan sols afegint termes al sumatori de l'expressió general i maximitzant-ne l'ordre global.

- [Bonet1994] p230-p231 (especialment la figura 2)

## El cas particular del RK1

Per a il·lustrar aquest fet, estudiem el cas particular més senzill, aquell en el qual  $k=1$ . El mètode, conegut de forma abreujada com RK1, consistiria en utilitzar la fórmula recursiva

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hc_1 K_1^n = y_n + hc_1 f(x_n, y_n) \end{cases}$$

En aquest cas, per tant, tan sols ens apareix un coeficient per calcular, el  $c_1$ . Calculem l'ordre global màxim d'aquesta fórmula:

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \right| = \left| y'(x) + \frac{y''(x)}{2} h + \dots - c_1 f(x, y) \right|$$

El màxim ordre d'aquesta fórmula apareixerà si els termes independents que hi ha es fan nuls. És a dir, si es compleix

$$y'(x) - c_1 f(x, y) = 0$$



la qual cosa succeeix quan  $c_1=1$ . En aquest cas, l'ordre global del mètode és 1:

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \right| = \left| \frac{y'(x)}{2} h + \dots \right| \propto h^1$$

i l'expressió general per a calcular la solució queda

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hc_1 K_1^n = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

Podem observar com el mètode RK1 coincideix amb el que vam anomenar mètode d'Euler, que corresponia a aproximar la solució a cada interval mitjançant una recta.

- [Bonet1994] p230-p231 (especialment la figura 2)

## 4.2.2 Els mètodes RK2 i RK4

En principi, podem augmentar l'ordre global del mètode (i per tant la seva precisió) tan com es vulgui amb el sol fet d'augmentar el valor de  $k$ . És a dir, afegint més termes al sumatori de l'expressió general. Ara bé, per tal de treballar amb mètodes que no comportin temps de càlcul molt grans, normalment s'acostuma a treballar amb els RK2 i RK4.

### El mètode RK2

Si en l'expressió general particularitzem  $k=2$ , la fórmula recursiva esdevé

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h[c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f(x_n + a_2 h, y_n + hb_{21} f(x_n, y_n))] \end{cases}$$

és a dir, un mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + a_2 h, y + hb_{21} f(x, y))$$

Calculant l'ordre global del mètode s'observa com pot arribar a ser 2 si els coeficients compleixen les relacions

$$\begin{cases} 1 - c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - a_2 c_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - c_2 b_{21} = 0 \end{cases}$$



la qual cosa ens mostra un fet important: imposar ordre màxim no ens porta a una solució única. En general, els valors dels coeficients s'acostumen a escollir com

$$\begin{aligned} a_2 &= b_{21} = 1 \\ c_1 &= c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

amb la qual cosa el mètode RK2 es planteja com un mètode d'ordre global 2, amb expressió recursiva

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h \left[ \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right] \end{cases}$$

- [Bonet1994] p235

## El mètode RK4

De forma anàloga, es pot treballar amb quatre termes en el sumatori i demanar ordre màxim. Es demostra que la solució tampoc no és única, perquè en general s'acostuma a utilitzar la fórmula recursiva.

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [K_1^n + 2K_2^n + 2K_3^n + K_4^n] \end{cases}$$

que assoleix un ordre global 4 amb els coeficients K calculats com

$$\begin{aligned} K_1^n &= f(x_n, y_n) \\ K_2^n &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1^n\right) \\ K_3^n &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_2^n\right) \\ K_4^n &= f(x_n + h, y_n + hK_3^n) \end{aligned}$$

en què es pot observar clarament la recursivitat del mètode, especialment en el càlcul dels coeficients K.

- [Bonet1994] p235-p236

## Exemple comparatiu: els mètodes RK2 i RK4

Compararem l'eficàcia dels dos mètodes a partir del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Aplicant l'expressió de l'RK2, fàcilment obtenim

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 + h + \frac{h^2}{2} \right)$$

Que coincideix amb l'expressió que ja vam obtenir pel cas del mètode de Taylor. En canvi, amb l'expressió del RK4, la fórmula recursiva esdevé

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} \right)$$

on es pot veure clarament com aquesta darrera aproximació té en compte dos ordres més que no en el RK2. Numèricament, per un pas  $h=0.5$  s'obtenen els següents resultats:

$x_n$	$y(x_n)$	$y_n$ RK2	Error RK2	$y_n$ RK4	Error RK4
0.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0
0.5	1.6487	1.62	0.03	1.6484	0.0003
1.0	2.7183	2.64	0.08	2.7173	0.0009

amb els coeficients K calculats iterativament:

$x_n$	$k_{1n}$	$k_{2n}$	$k_{3n}$	$k_{4n}$	$Y_n$
0.0					1.0000
0.5	1.0000	1.2500	1.3125	1.6563	1.6484
1.0	1.6484	2.0605	2.1636	2.7302	2.7173

## PROBLEMA

La probabilitat que una variable gaussiana estigui entre  $(-\infty, -1)$  es calcula a partir de la integral de la seva funció de distribució, com ja vam veure en el problema proposat en una sessió anterior. Si definim  $g(x)$  com

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dt e^{-t^2/2}$$

aquesta probabilitat és  $g(-1)$ . Calcula aquest valor de  $g(x)$  amb el mètode RK2 amb un pas  $h=0.5$ , i compara els resultats amb els obtinguts en aquell problema.

## RESUM

En aquesta sessió hem estudiat l'expressió general dels mètodes de Runge-Kutta, particularitzant les expressions pels dos mètodes més utilitzats: els RK2 i RK4. Finalment, hem observat la precisió d'ambdós sobre un problema ja plantejat amb anterioritat per d'altres mètodes més simples.





## Annex

### EXERCICIS

#### Problema 1

Aproximem, pel criteri del minimax, la funció  $y = \sin x$  en l'interval  $[0, \pi/2]$  per una recta  $y = ax + b$ . Trobar el valor dels coeficients  $a$  i  $b$ .

#### Solució

Anomenem  $f(x) = \sin x$  i  $p(x) = ax + b$ . Definim l'error com

$$e(x) = f(x) - p(x)$$

Atès que la funció sinus és creixent en l'interval  $[0, \pi/2]$ , sabem que l'error màxim es produirà en tres punts: els extrems de l'interval,  $0$  i  $\pi/2$ , i un punt intermedi  $\xi$  que de moment desconeixem. Sabem, a més, pel teorema de l'equioscillació de l'error, que es complirà

$$e(0) = -e(\xi) = e(\pi/2) \quad (1)$$

D'aquesta relació obtenim dues equacions, per un total de tres incògnites,  $a$ ,  $b$ ,  $\xi$ . Per obtenir una tercera equació observem que l'error serà extrem en els punts  $0$ ,  $\pi/2$  i  $\xi$ . Com que  $f(x)$  i  $p(x)$  són derivables amb continuïtat en l'interval, també ho serà l'error. Així, el punt  $\xi$  serà un extrem relatiu de  $e(x)$  i complirà

$$e'(\xi) = 0$$

Ara que ja tenim les tres equacions, passem a resoldre-les. De l'equació (1) tenim que

$$e(0) = -b = e(\pi/2) = 1 - a\pi/2 - b \Rightarrow a = 2/\pi \approx 0.6366$$

Per altra banda, si recopilem les equacions que involucren  $\xi$ , tenim que

$$\begin{cases} e(\xi) = \sin\xi - a\xi - b = -e(0) = b \\ e'(\xi) = \cos\xi - a = 0 \end{cases}$$

Operant, obtenim que

$$\xi = \arccos a, \quad b = 1/2(\sin\xi - a\xi)$$

Finalment, ens queda,

$$\xi = \frac{\arccos 2/\pi}{\pi} \approx 0.8807, \quad b \approx 0.1053$$



## Problema 2

En un transistor MOSFET, el corrent de drenador ve donat per la fórmula

$$I_D = \frac{1}{2} \beta (V_{GS} - V_T)^2$$

on  $\beta$  és un paràmetre que depèn de la tecnologia i la geometria del transistor,  $V_T$  és una tensió que depèn de la tecnologia i de la polarització del chip. Finalment  $V_{GS}$  és la tensió entre la font i el drenador. El fabricant ens dona els valors,  $\beta = (1.0 \pm 0.1)10^{-4} \text{ A} \cdot \text{V}^{-2}$ ,  $V_T = 1.0 \pm 0.2 \text{ V}$ . Mesurem  $V_{GS} = 5.0 \pm 0.1 \text{ V}$ . Trobar la propagació lineal del errors de les mesures en l'error absolut i relatiu de  $I_D$ .

## Solució

La propagació lineal de l'error en una funció  $f(\cdot)$  que depèn de  $n$  variables  $x_1 \dots x_n$  amb errors  $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$  ve donada per la fórmula,

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{(x_1 \dots x_n)} \epsilon_i$$

En el nostre cas,  $I_D$  depèn de tres variables,  $\beta$ ,  $V_{GS}$  i  $V_T$ . Ens queda doncs

$$\epsilon = \left| \frac{\partial I_D}{\partial \beta} \right| \epsilon_\beta + \left| \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \right| \epsilon_{GS} + \left| \frac{\partial I_D}{\partial V_T} \right| \epsilon_T$$

Les derivades parcial corresponents són

$$\frac{\partial I_D}{\partial \beta} = \frac{1}{2} (V_{GS} - V_T)^2, \quad \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} = \beta (V_{GS} - V_T), \quad \frac{\partial I_D}{\partial V_T} = -\beta (V_{GS} - V_T)$$

Per tant,

$$\epsilon = \frac{1}{2} (V_{GS} - V_T)^2 \epsilon_\beta + \beta |V_{GS} - V_T| (\epsilon_{GS} + \epsilon_T)$$

L'error relatiu el podem obtenir fent el quocient de  $\epsilon$  amb  $I_D$ . Numèricament, tenim

$$\beta = (1.0 \mp 0.1) \cdot 10^{-4}, \quad V_{GS} = 5.0 \mp 0.1, \quad V_T = 1.0 \mp 0.2$$

Amb aquests valors, ens queda,

$$I_D = 8 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_R = \frac{\epsilon}{I_D} = 0.25$$



### Problema 3

Sigui la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} dx x \ln \sin x$$

Calculeu l'aproximació numèrica fent la quadratura de Gauss a dos punts.

### Solució

La fórmula de la quadratura de Gauss per dos punts ve donada per

$$\int_{-1}^1 dt f(t) \approx I_2^G = \Delta_0 f(t_0) + \Delta_1 f(t_1)$$

on  $t_0 \approx -0.57735$  i  $t_1 \approx +0.57735$  són els zeros del polinomi de Legendre de segon ordre i  $\Delta_0 = \Delta_1 = 1$ . Per aplicar aquesta fórmula, primer cal transformar la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} dx x \ln \sin x$$

i convertir-la en una integral en l'interval  $[-1, 1]$ . Això ho aconseguim amb el canvi

$$t = \frac{4x}{\pi} - 1$$

i ens queda

$$I = \frac{\pi^2}{16} \int_{-1}^1 dt (t+1) \ln \sin \frac{\pi}{4} (t+1)$$

L'aproximació serà doncs,

$$I \approx \frac{\pi^2}{16} (\Delta_0 (t_0 + 1) \ln \sin \frac{\pi}{4} (t_0 + 1) + \Delta_1 (t_1 + 1) \ln \sin \frac{\pi}{4} (t_1 + 1))$$

Numèricament, obtenim,

$$I \approx -0.3469$$



## Problema 4

Quina és la correcció que dona el primer terme de la sèrie de Euler-McLaurin al càlcul de la integral

$$I = \int_0^1 dx x \cotanh(x)$$

pel mètode dels Trapezis i  $h = 1/3$  ?

## Solució

Si tenim una integral

$$I = \int_{x_0}^{x_n} dx f(x)$$

la fórmula d'Euler-McLaurin que dona la correcció a l'aproximació pel mètode dels Trapezis és

$$R = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{2k+2} (f^{(2k+1)}(x_n) - f^{(2k+1)}(x_0))$$

essent  $B_j$  els números de Bernoulli i  $h$  el pas de integració. El primer terme d'aquesta sèrie és doncs

$$S_1 = \frac{B_2}{2} h^2 (f'(x_n) - f'(x_0))$$

Per una banda, sabem que  $B_2 = 1/6$ . Per l'altra, en la nostra integral,  $x_n = 1$ ,  $x_0 = 0$  i  $h = 1/3$ . La funció a integrar és

$$f(x) = x \cotanh x = x \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Si recordem que

$$\cosh' x = \sinh x, \quad \sinh' x = \cosh x$$

calcular la derivada de  $f$  és immediat. Trobem

$$f'(x) = \frac{1}{\sinh x} \left( \cosh x - \frac{x}{\sinh x} \right)$$

Amb la derivada expressada d'aquesta forma, podem resoldre més fàcilment el problema que se'ns presenta. A l'hora de calcular  $f'(0)$ , ens apareix una indeterminació. Per resoldre-la, es pot recórrer al teorema de l'Hôpital o bé substituir per infinítesims. Recordem de nou que per  $x \rightarrow 0$



$$\sinh x \approx x + \frac{1}{6}x^3, \quad \cosh x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Amb aquestes expressions, podem aproximar,

$$\frac{x}{\sinh x} \approx \frac{x}{x + \frac{1}{6}x^3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}x^2} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$$

Per tant,

$$\cosh x - \frac{x}{\sinh x} \approx \frac{2}{3}x^2$$

i

$$f'(x) = \frac{1}{\sinh x} \left( \cosh x - \frac{x}{\sinh x} \right) \approx \frac{1}{x + \frac{1}{6}x^3} \frac{2}{3}x^2 \rightarrow 0$$

quan  $x \rightarrow 0$ . Finalment, el valor numèric de  $S_1$  serà,

$$S_1 = \frac{1}{6 \cdot 2} \left( \frac{1}{3} \right)^2 \frac{1}{\sinh 1} \left( \cosh 1 - \frac{x}{\sinh 1} \right) \approx 0.0055$$

## Problema 5

Volem interpolar la funció  $y = \ln x$  entre 1 i 3. Per a aquest objectiu, disposem de la següent taula de valors,

x	1	2	3	x	1
y	0	0.6931	1.0986	y	0

Trobar, segons la interpolació de Lagrange, el valor per  $x = 2.5$ .

## Solució

Atès que només estem interessats en el resultat final, tant hi fa com calculem el polinomi interpolador. Si fem servir el mètode de Newton, el càlcul serà més ràpid i el resultat el mateix. Avaluem doncs les diferències.

$x$	$y$		
1	0		
2	0.6931	0.6931	
3	1.0986	0.4055	-0.1438



Amb això obtenim el polinomi interpolador,

$$P(x) = 0.6921(x - 1) - 0.1438(x - 1)(x - 2).$$

L'avaluem en el punt demanat,

$$p(2.5) \approx 0.9318.$$

Podem comparar aquest resultat amb el que la calculadora ens dona per  $\ln 2.5 \approx 0.9163$ .

## Problema 6

---

L'equació que governa l'aturada d'un motor de corrent continu a què no s'aplica cap tensió és

$$\frac{dw}{dt} = -1.65w,$$

en què  $\omega$  és la velocitat angular del motor. Integrem aquesta equació diferencial pel mètode d'Euler amb una condició inicial  $\omega(0) = 3$ . Quin valor de  $h$  és el més gran que permet calcular  $\omega$  amb una precisió de 0.05 en  $t = 1$ s?

## Solució

---

D'entrada, aquesta equació diferencial la podem resoldre exactament. La solució és

$$w(t) = w(0)e^{-1.65t}$$

Tenint en compte que  $\omega(0) = 3$ , en  $t = 1$  ens quedarà

$$w(1) = 3 \cdot e^{-1.65} \approx 0.5761$$

Si integrem aquesta equació pel mètode de Euler,

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k)$$

i com que en el nostre cas  $f(\omega) = -1.65\omega$ , ens queda

$$w_{k+1} = w_k - h \cdot 1.65w_k = (1 - 1.65h)w_k$$

Si apliquem aquesta fórmula recursivament, arribarem a

$$w_k = (1 - 1.65h)^k w(0) \quad (2)$$

Com que volem calcular el valor de  $\omega$  en  $t_1 = 1$  partint de  $t_0 = 0$ ,



$$h = \frac{t_1 - t_0}{k} = \frac{1}{k}$$

Amb aquest resultat, reescrivim l'equació (2),

$$w_k = \left(1 - \frac{1.65}{k}\right)^k w(0) = 3\left(1 - \frac{1.65}{k}\right)^k$$

Cal ara trobar k tal que la diferència entre  $w_k$  i  $w(1)$  sigui inferior a 0.05. Aquesta dada ens dona una equació per k,

$$|w(1) - w_k| = \left|3 \cdot e^{-1.65} - 3\left(1 - \frac{1.65}{k}\right)^k\right| < 0.05$$

Tot i que es pot intentar resoldre aquesta equació amb mètodes sofisticats, per prova i error podem trobar ràpidament k. Obtenim,

$$|w(1) - w_{16}| \approx 0.0503, \quad |w(1) - w_{17}| \approx 0.0473$$

amb

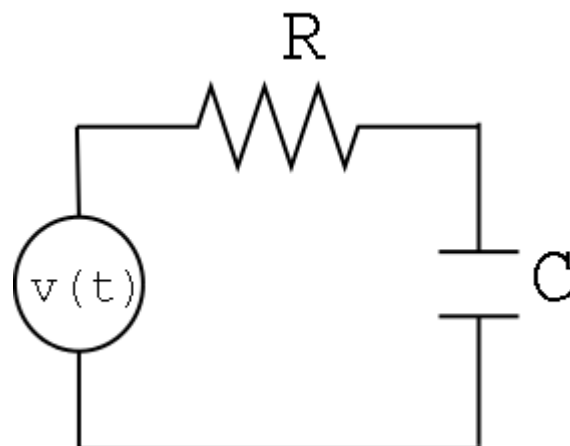
$$w_{17} \approx 0.5288$$

Per tant, el valor de h màxim amb el que podem aproximar la solució amb precisió de 0.05 és

$$h = \frac{1}{k} = \frac{1}{17}$$

## Problema 7

Mesurem la resposta d'un condensador no-lineal i obtenim els següents valors per la tensió entre els terminals V i la càrrega acumulada Q.



V (V)	-3	-1	0	1	3
Q (μC)	-2	-1	0	1	2

Recordem que l'equació diferencial del circuit és,



$$R \frac{d}{dt} Q(t) + V(Q) = V_0 \sin(2\pi ft)$$

Volem calcular la resposta del condensador a un corrent altern de freqüència  $f = 1\text{kHz}$  i tensió màxima  $V_0 = 1\text{V}$ , amb una resistència en sèrie de  $2.2\text{ k}\Omega$ .

1. Interpolar la resposta del condensador.
2. Amb el resultat de l'apartat anterior volem integrar l'equació diferencial del circuit fins a assolir l'estat estacionari. Quin pas d'integració h cal triar? Amb la condició inicial  $Q(0) = 0$ , resoldre l'equació i representar gràficament la solució per un període del generador de tensió.

## Solució

Per interpolar la resposta del condensador, podem emprar els mètodes tradicionals, com ara el mètode de Newton. En el cas d'aquest problema, podem però trobar una solució particular molt més eficient. El resultat serà, però, el mateix que obtindrem fent servir d'altres tècniques.

Observem que la taula de valors és senar, és a dir, que  $V(Q) = -V(-Q)$ . Això ens indica que el polinomi interpolador haurà de ser senar per complir les condicions de interpolació. Com que el nombre de dades de què disposem ens determina que el grau màxim del polinomi interpolador serà 4, obtenim que el polinomi del nostre cas ha de tenir la forma,

$$V(Q) = \alpha_1 Q + \alpha_2 Q^3$$

Si ara particularitzem pels valors  $Q = 10^{-6}$  i  $Q = 2 \cdot 10^{-6}$ , ens queda un sistema d'equacions lineal per  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ,

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 10^{-6} + \alpha_2 10^{-18} \\ 3 = 2 \alpha_1 10^{-6} + 8 \alpha_2 10^{-18} \end{cases}$$

Si resollem aquest sistema, obtenim el polinomi interpolador,

$$V(Q) = \frac{5}{6} 10^6 Q + \frac{1}{6} 10^{18} Q^3$$

Comprovem com aquesta solució compleix les condicions d'interpolació,

$$\begin{aligned} V(-10^{-6}) &= -1, & V(-2 \cdot 10^{-6}) &= -3 \\ V(0) &= 0, & V(10^{-6}) &= 1, & V(2 \cdot 10^{-6}) &= 3 \end{aligned}$$

Insistim que aquest és el mateix resultat que s'obté mitjançant d'altres mètodes. Si ara introduïm aquest resultat en l'equació diferencial del circuit, ens queda,



$$R \frac{d}{dt} Q(t) = -\frac{5}{6} 10^6 Q - \frac{1}{6} 10^{18} Q^3 + V_0 \sin(2\pi f t)$$

Aïllant la derivada i substituint les dades numèriques obtenim,

$$\frac{d}{dt} Q(t) = f(Q, t) = -380Q - 7.6 \cdot 10^{16} Q^3 + 4.5 \cdot 10^{-4} \sin(6.3 \cdot 10^3 t) \quad (3)$$

Del terme proporcional a Q traiem una de les constants de temps del sistema, equivalent al temps de càrrega i descàrrega del condensador,  $\tau_0 = 2.6\text{ms}$  mentre que del període del senyal sinusoidal extraiem  $\tau_1 = 1\text{ms}$ . Tot i que el sistema és no-lineal, observant els valors d'aquestes constants de temps, podem fer una primera estimació del valor de h necessari per a integrar l'equació diferencial. Si volem que el sistema assoleixi l'estat estacionari, haurem d'esperar, al menys, uns quants múltiples (5 o 10) de  $\tau_0$  que és la constant de temps més gran. A l'hora de triar h, però, haurem de tenir en compte  $\tau_1$ , la constant de temps més petita. Si triem una h de l'ordre de  $\tau_1$  o superior perdrem l'efecte de la font de tensió sinusoidal sobre el circuit. Si, per exemple, triem

$$h \sim \frac{\tau_1}{10} = 10^{-4}$$

estarem agafant 10 punts d'avaluació dins del període de la font que en principi, ens haurien de donar prou informació sobre el comportament del sistema. Si el mètode de integració és de primer ordre, podem esperar un error d'ordre  $h^2$ , és a dir una centèsima. Si el mètode és d'ordre 2, l'error serà d'ordre  $h^3$ , una mil·lèsima. Si volem més precisió, caldrà triar una h més petita o un mètode d'integració d'ordre més alt. Amb el valor escollit  $h = 10^{-4}$  integrem l'equació (3) pel mètode més senzill, el mètode d'Euler, sobre un període del senyal sinusoidal. A partir de la condició inicial  $t_0 = 0$  i  $Q(0) = Q_0 = 0$ , tindrem que

$$Q_{k+1} = Q_k + hf(Q_k, t_k), \quad t_{k+1} = t_k + h,$$

explícitament,

$$Q_{k+1} = Q_k + h(-380Q_k - 7.6 \cdot 10^{16} Q_k^3 + 4.5 \cdot 10^{-4} \sin(6.3 \cdot 10^3 t_k))$$

Obtenim la següent taula de valors que representem en la figura 1.

k	$t_k$	$Q_k$
0	0.	0.
1	0.0001	0.
2	0.0002	2.651E-08
3	0.0003	6.821E-08
4	0.0004	1.059E-07
5	0.0005	1.191E-07
6	0.0006	1.013E-07
7	0.0007	6.276E-08
8	0.0008	1.554E-08
9	0.0009	-2.768E-08
10	0.001	-5.237E-08

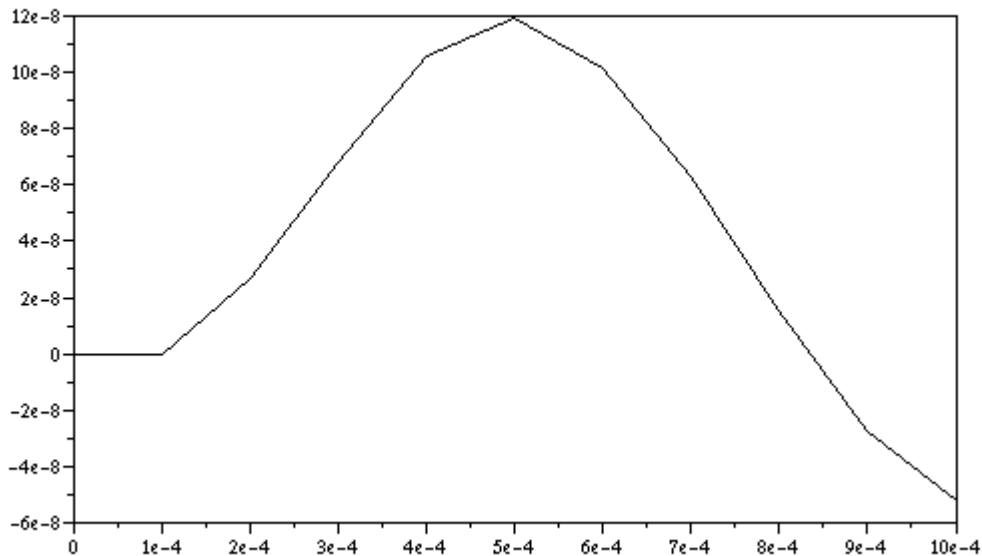


Figura 1: Representació de la solució de l'equació diferencial  $Q_k$  en funció de  $t_k$ .

## Problema 8

La funció de transferència d'una línia de transmissió és

$$H(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s^2 + 3s + 2}$$

1. Considerant que la variable  $s$  prové d'una transformada de Laplace, quin és el rang de valors físic de  $s$ .
2. Aproximar el numerador un filtre del tipus  $h(s) = as + b$ .
3. Quin règim reproduïx millor aquesta aproximació ?

## Solució

Considerem la fórmula general de la transformada de Laplace d'una funció  $f(t)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t)$$

Per tal que la integral estigui ben definida, cal que  $s$  sigui positiu, altrament l'exponencial està mal comportada en el límit superior de la integral. Per tant, el rang de valors físic de  $s$  real és l'interval  $[0, \infty[$

Si volem aproximar una funció amb un polinomi per mínims quadrats en aquest interval, cal que la integral del polinomi sigui finita. En l'infinit els polinomis divergiran. Caldrà, per tant, introduir una funció pes en les integrals. En aquest interval, la funció pes més habitual és l'exponencial decreixent. Això ens permet definir el producte escalar entre dues funcions  $f$  i  $g$  com



$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} dx e^{-s} f(s) g(s)$$

Amb aquesta funció pes, es pondera més els valors de  $s$  petits que no pas els grans. Per tant, reproduïrem millor l'estat estacionari, que correspon al límit  $s \rightarrow 0$ .

Per fer una aproximació per mínims quadrats amb un polinomi, sabem que és més útil descriure el polinomi en termes dels polinomis ortogonals corresponents a l'interval que estem estudiant. En el nostre cas, es tracta dels polinomis de Laguerre. Per tant, el polinomi  $p(s) = as + b$ , l'escriu com

$$p(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x)$$

on  $L_0$  i  $L_1$  són els polinomis de Laguerre d'ordre 0 i 1 respectivament. Amb aquesta formulació, el càlcul dels coeficients  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  és molt senzill, ja que

$$\alpha_i = \frac{1}{N_i} \int_0^{\infty} ds e^{-s} f(s) L_i(s)$$

essent  $f(s)$  la funció que volem aproximar,  $f(s) = e^{-\sqrt{s}}$ ,  $L_i$  el polinomi de Laguerre d'ordre  $i$  i el factor de normalització,

$$N_i = \int_0^{\infty} ds e^{-s} L_i(s)^2 = (i!)^2$$

Els dos primers polinomis de Laguerre, són

$$L_0(s) = 1, \quad L_1(s) = 1 - s$$

Per tant, els coeficients  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  els obtenim resolent les integrals,

$$\alpha_0 = \int_0^{\infty} ds e^{-s} e^{-\sqrt{s}}, \quad \alpha_1 = \int_0^{\infty} ds e^{-s} e^{-\sqrt{s}} (1 - s)$$

Cap d'aquestes dues integrals no té solució analítica, però les podem avaluar numèricament. Per fer-ho tenim diverses opcions, com ara truncar la integral en el límit superior i després emprar un mètode de Simpson. Ens decantarem per la generalització de la quadratura de Gauss a dos punts,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} f(x) = \Delta_0 f(x_0) + \Delta_1 f(x_1)$$

en què  $x_0$  i  $x_1$  són els zeros del polinomi de Laguerre de segon grau,  $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$  i

$$\Delta_0 = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \Delta_1 = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

Aquest valors es van calcular a classe, i tenim,



$$\begin{aligned}x_0 & 0.58579 \\x_1 & 3.41421 \\ \Delta_0 & 0.85355 \\ \Delta_1 & 0.14645\end{aligned}$$

Amb aquestes dades, calculem les integrals i obtenim

$$\alpha_0 = 0.4201, \quad \alpha_1 = 0.1740$$

Si ara volguéssim fer l'aproximació minimax, hem de fer la consideració següent. Si observem la funció a aproximar (figura) veiem que té una asymptota en  $y = 0$  quan  $x \rightarrow \infty$ .

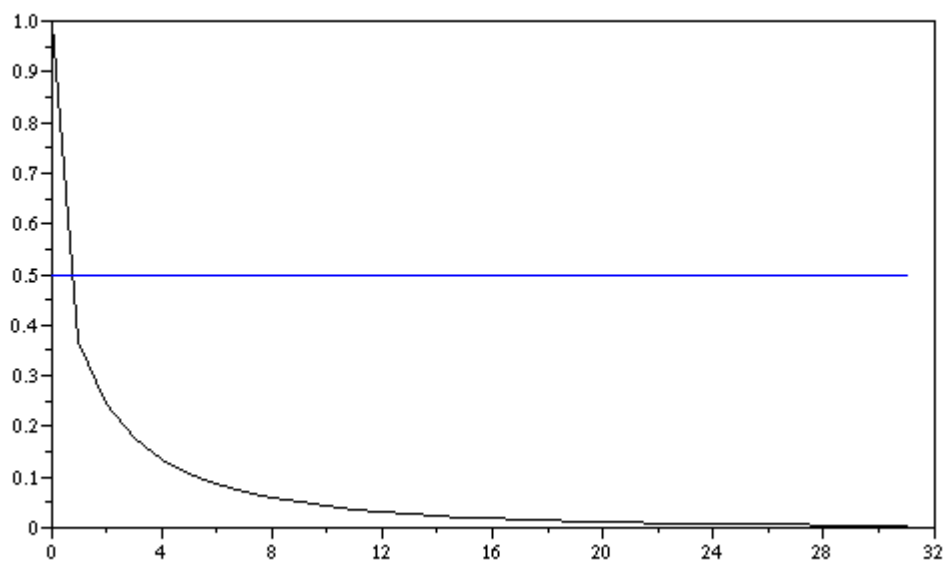


Figura 2: Representació gràfica de la funció  $f(s) = e^{-\sqrt{s}}$ , i de la seva aproximació minimax  $y = 0.5$

Qualsevol recta  $y = ax + b$  que tingui el coeficient  $a$  diferent de zero divergeix quan  $x \rightarrow \infty$  i per tant l'error també divergirà. Per tal que l'error no divergeixi, cal doncs que  $a = 0$ . Per fixar el valor de  $b$  fixem-nos que com la funció  $f(s) = e^{-\sqrt{s}}$ , és monòtonament decreixent, l'error màxim el trobarem en els extrems de l'interval  $[0, \infty[$ . Per tal que es compleixi el teorema d'equioscil·lació, cal doncs que

$$b = \frac{1}{2}$$

Aquesta aproximació, tal com s'ha calculat, pondera tots el punts amb el mateix pes i per tant descriu igual de bé (o de malament) el transitori i l'estat estacionari.



## Problema 9

La transformada de Fourier del senyal de la Figura 3 ve donat per la funció

$$f(w) = 2V_0 \frac{\sin(aw)}{w}$$

amb  $V_0 = 500\text{mV}$  i  $a = 1\mu\text{s}$ . Volem realitzar-ne una aproximació polinòmica per mínims quadrats entre  $]-\infty, \infty[$  fins a grau 3.

1. Trobar una funció pes adient per a l'aproximació.
2. Escriure l'aproximació en termes d'un desenvolupament en polinomis ortogonals.
3. Calcular numèricament els coeficients del desenvolupament.
4. Donar una estimació de l'error comès en calcular les integrals.

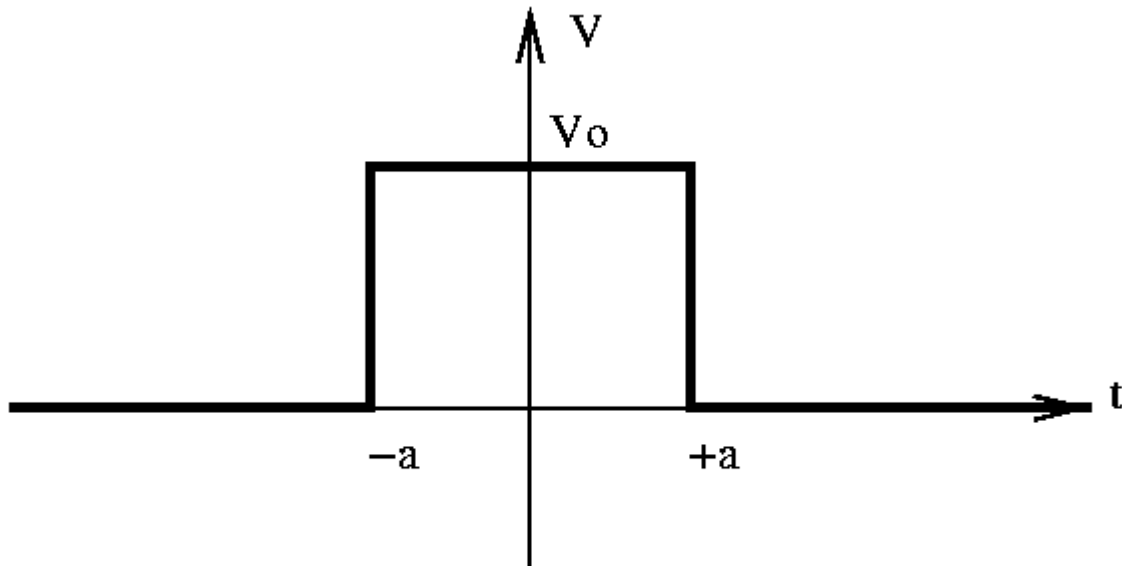


Figura 3: Pols quadrat.

## Solució

Volem fer una aproximació amb polinomis ortogonals sobre el domini dels reals, és a dir, en l'interval  $]-\infty, \infty[$ . Per això necessitem definir una funció pes adient, o, altrament, les integrals dels polinomis no convergiran. En aquest interval, habitualment s'utilitza la funció  $w(x) = e^{-x^2}$  que correspon als polinomis de Hermite. Atès que la funció que volem aproximar és una transformada de Fourier, aquesta funció pes donarà, evidentment, més contribució a les baixes freqüències que no pas a les altes. Haurem de tenir en compte aquest fet quan emprem el resultat de l'aproximació. De fet, qualsevol funció pes que volguem emprar per obtenir polinomis ortogonals en l'interval que estem estudiant haurà d'anar cap a zero en els extrems  $\pm\infty$  i per tant, eliminarà la contribució de les altes freqüències. Tant per tant, treballarem amb la funció habitual per poder així emprar les propietats tabulades del polinomis de Hermite.

En aquestes, condicions, l'aproximació la podem escriure en termes dels polinomis ortogonals de Hermite  $H_n(x)$  com



$$f(w) = \alpha_0 H_0(w) + \alpha_1 H_1(w) + \alpha_2 H_2(w) + \alpha_3 H_3(w) \quad (4)$$

Els coeficients  $\alpha_j$ , són la projecció de la funció sobre el polinomi corresponent:

$$\alpha_j = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-x^2} f(w) H_j(w) \quad (5)$$

Els primers polinomis ortogonals de Hermite, els podem deduir de la relació de recurrència,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (6)$$

amb les condicions inicials  $H_{-1}(x) = 0$  i  $H_0(x) = 1$ . Obtenim la taula següent,

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \end{aligned} \quad (7)$$

Aprofitem aquest punt per esmentar que existeixen dues definicions habituals dels polinomis de Hermite. La primera és la que estem utilitzant, mentre que la segona fa servir la funció pes  $w(x) = e^{-x^2/2}$ . La relació de recurrència corresponent és, aleshores,

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$$

El pas d'una definició a l'altra es fa, senzillament, amb un canvi de variable en les integrals.

A l'hora de calcular els coeficients  $\alpha_j$  del desenvolupament, cal efectuar les integrals de l'equació 5. Per simplicitat, ho farem numèricament. Es tracta de integrals impròpies de primera espècie. D'entrada, no veiem cap canvi de variable que ens pugui simplificar el càlcul. Una opció fóra truncar l'interval de integració, però, vista la forma de la integral, el més senzill és emprar una quadratura de Gauss per a aquest interval i amb la funció pes dels polinomis de Hermite. Les abscisses i pesos per a la quadratura de Gauss amb tres punts en l'interval  $]-\infty, \infty[$  amb la funció pes  $w(x) = e^{-x^2}$  són

$\pm x_i$	$\Delta_i$
0.000001	1.18163
1.224740	0.29541

Aquestes dades les hem extretes d'un llibre de taules. Així, les integrals ens quedaran

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{2^j j! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-x^2} f(w) H_j(w), \\ &\simeq f(x_0) H_j(x_0) \Delta_0 + f(x_1) H_j(x_1) \Delta_1 + f(x_2) H_j(x_2) \Delta_2 \\ &\simeq 1.18163 f(0.00000) H_j(0.00000) + 0.29541 f(1.22474) H_j(1.22474) \\ &\quad - 0.29541 f(-1.22474) H_j(1.22474) \end{aligned} \quad (8)$$

Fixem-nos-hi ara que la funció que volem aproximar és parella  $f(w) = -f(-w)$ , mentre que els polinomis de Hermite són parell o senars, segons si el seu grau és parell o senar:

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$$



Aquesta propietat es pot deduir de la relació de recurrència o també observant la taula dels primers polinomis. Així, les integrals corresponents als coeficients senars, són integrals d'una funció senar sobre un domini parell (i a més els integrands són ben comportats a l'infinit) i per tant s'anul·len. Si efectuem les operacions numèriques, també observarem com els coeficients es fan zero. En resum,

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0 \quad (9)$$

Per al càlcul dels dos coeficients restants apliquem les fórmules de la quadratura amb tres punts, tot obtenint,

$$\alpha_0 = 9.99997 \cdot 10^{-7}, \quad \alpha_2 = -5.64764 \cdot 10^{-13} \quad (10)$$

Així, l'aproximació de la funció, ens queda,

$$f(w) \simeq \alpha_0 H_0(w) + \alpha_2 H_2(w) \quad (11)$$

Podem comparar la funció i la seva aproximació en la figura 4 en l'interval on la comparació és rellevant. Recordem que la funció pes modula la contribució de les altes freqüències. Per exemple, per  $\omega = 10$ ,  $e^{-100} \sim 10^{-44}$ . En la regió rellevant, veiem doncs com l'aproximació és bona. De fet, per aquest rang de valors, la funció  $f$  la podem aproximar molt acuradament per

$$f(x) = 2V_0 \frac{\sin(ax)}{x} \simeq 2V_0 \frac{ax}{x} = 2V_0 a \quad (12)$$

és a dir, una constant. En efecte, les correccions a aquesta fórmula venen d'expandir en sèrie de Taylor  $\sin(ax)$ . Com que  $a$  pren un valor petit, les contribucions de les correccions seran molt petites:

$$f(x) = 2V_0 \frac{\sin(ax)}{x} = 2V_0 \left( 1 - \frac{1}{6} a^2 x^2 + \mathcal{O}(a^4 x^4) \right) \quad (13)$$

De fet, el que veiem és que a efectes pràctics, el pols es comporta bàsicament com una delta : té transformada de Fourier constant!

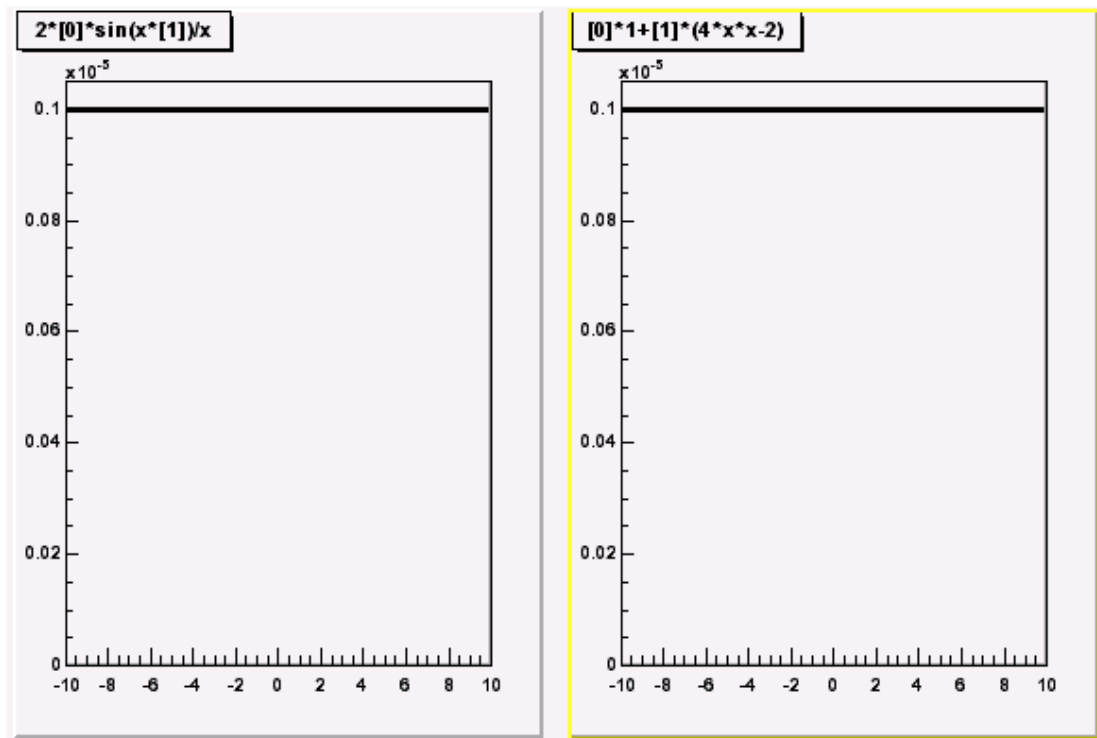


Figura 4: A l'esquerra, gràfica de  $f$ . A la dreta, gràfica de l'aproximació.

Per tal d'avaluar l'error de la integració numèrica, hem de tenir en compte que tindrem dues fonts d'error. La primera ve de l'aproximació de la integral per la fórmula de la quadratura de Gauss. La segona, ve de l'error de precisió de les dades i de les abscisses  $x_i$  i deltes  $\Delta_i$  d'integració.

Per a la primera, l'aproximació de la integral per la quadratura de Gauss, recordem que consisteix a substituir la funció que estem integrant pel polinomi interpolador (que serà de grau 2 en el nostre cas, ja que tenim 3 abscisses), i que la tria d'abscisses ens garanteix que la fórmula és exacta fins a ordre  $2 * 2 + 1 = 5$ . Fixem-nos que si expandim el sinus dins la integral, seguint l'equació 13 i ens quedem amb el terme constant, la correcció serà d'ordre  $a^2 = 10^{-12}$ . Si aproximem  $f(\omega)$  per una constant, les funcions que integrarem sempre són polinomis, de grau 2 com a màxim. Per tant, l'aproximació és exacta fins a correccions d'ordre  $a^2$ .

Per a la segona font d'error, la precisió limitada de les dades, la taula que se'n dona amb abscisses i deltes té precisió  $\varepsilon = 10^{-5}$ . A banda caldria saber la precisió de  $V_0$  i  $a$ . Com que ens volem centrar en el càlcul de les integrals, suposarem que les dades són exactes i ens quedarem només amb la contribució de les abscisses i les deltes. Per tal d'avaluar-ne els efectes, podem calcular la propagació lineal de l'error,

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_n} F(x_0 \dots x_n) \right| \varepsilon_n$$

Atès que podem aproximar la funció  $f$  per una constant en el domini rellevant, obtenim pels coeficients  $\alpha_j$

$$\varepsilon_j = 2V_0 a (|H_j(x_0)| + |H_j(x_1)| + |H_j(x_2)| + |H'_j(x_0)|\Delta_0 + |H'_j(x_1)|\Delta_1 + |H'_j(x_2)|\Delta_2) \varepsilon, \quad (14)$$



en què les  $H'$  són les derivades dels polinomis d'Hermite. Numèricament ens dona,

$$\varepsilon_0 \sim \varepsilon_2 \sim 10^{-11} \quad (15)$$

Fixem-nos que l'error és superior al que cometem per aproximar la funció  $f$  per una constant.

## Problema 10

Podem modelar una línia de transmissió com una resistència  $R$  en sèrie amb una capacitat  $C$ . El senyal transmès correspon a una font de tensió i el senyal rebut a la tensió en el condensador, tal com s'indica en la Figura 2. A través d'aquesta línia enviem un pols com el la figura 1. Volem calcular quin serà el senyal rebut.

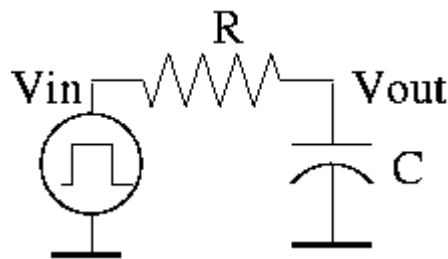


Figura 5: Circuit equivalent a la línia de transmissió.

1. Demostrar que l'equació diferencial que compleix  $v_{out}$  és

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} = \frac{1}{RC}(-v_{out}(t) + v_{in}(t))$$

2. Com cal triar el pas  $h$  per fer-ne la integració numèrica.
3. Integrar l'equació diferencial numèricament.
4. Ens pot ajudar el resultat del problema anterior a calcular  $v_{out}$ ? Com?

Les dades són

$V_0$  500 mV  
 $a$  1  $\mu$ s  
 $R$  50  $\Omega$   
 $C$  20 nF

## Solució

Comencem buscant l'equació diferencial que compleix el circuit de la figura. Per la llei dels nusos, la suma de les diferències de potencial en el circuit ha de ser zero. Així,

$$v_{in} - v_R - v_{out} = 0 \quad (16)$$

en què  $v_R$  és la caiguda de tensió a la resistència. Per la llei de Ohm, sabem que

$$v_R = R_i$$



en què  $i$  és la intensitat de corrent que circula pel circuit. Per la llei de conservació de la càrrega elèctrica, aquesta intensitat s'ha de correspondre amb variacions de la càrrega acumulada en el condensador  $q$ ,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La càrrega acumulada en un condensador és proporcional a la diferència de potencial en els extrems,

$$q = C v_{out}$$

Si recopilem totes aquestes relacions i les introduïm en l'equació [16](#), obtenim

$$v_{in} - RC \frac{dv_{out}}{dt} - v_{out} = 0 \quad (17)$$

Aïllem el terme de la derivada per deixar l'equació en la forma habitual,

$$\frac{dv_{out}(t)}{dt} = \frac{1}{RC} (-v_{out}(t) + v_{in}(t)) \quad (18)$$

Per tal d'integrar aquesta equació diferencial cal que determinem quin és el pas de integració temporal  $h$ . Per fer-ho, identifiquem les constants de temps de l'equació. D'una banda, tenim la constant de descàrrega del condensador  $\tau = RC = 10^{-6}$ s. D'una altra banda, tenim  $a$  que ens indica la durada del pols que introduïrem a la xarxa. Tenint en compte les dades del problema, les dues constants de temps són iguals. Per això triarem  $h$  10 cops més petita que  $\tau$  o  $a$ ,

$$h = 10^{-7} = 0.1 \mu s$$

Un cop triat el pas d'integració, fixem-nos que l'enunciat no ens especifica cap condició inicial. Si ho mirem des del punt de vista del sistema de transmissió, volem pensar que el condensador estarà descarregat quan el pols comenci a passar per la línia. El pols comença en  $t = -1 \mu s$ . Per tant, triarem com a condició inicial que

$$q(t = -1 \mu s) = 0 \Rightarrow v_{out}(t = -1 \mu s) = 0$$

El mètode numèric d'integració de l'equació diferencial ens donarà el valor de la tensió  $v_{out}(t)$  en un conjunt discret d'instantos de temps  $t_k$ . Els anomenarem

$$v_{out}(tk) = v_{out}(k)$$

Els instantos de temps  $t_k$  corresponen a avançar  $k$  passos de durada  $h$  des de l'instant inicial  $t_0$ ,

$$t_k = t_0 + kh$$

En el nostre cas i per tal de simplificar, comptarem el temps en unitat de microsegons i les tensions en volts. Així tindrem que

$$h = 0.1, \quad t_0 = -1, \quad v_{out}(0) = v_{out}(t_0) = 0, \quad V_0 = 0.5$$

Pel que fa a la tria del mètode, ens decantarem pel més senzill que és el mètode de Euler. Recordem que per una equació diferencial genèrica



$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

el mètode ens proposa com a solució,

$$x(k+1) = x(k) + hf(t_k, x(k))$$

En el nostre cas, això es tradueix en

$$\begin{aligned} v_{out}(k+1) &= v_{out}(k) + \frac{h}{RC}(-v_{out}(k) + v_{in}(t_k)) \quad (19) \\ v_{out}(k+1) &= v_{out}(k) \left(1 - \frac{h}{RC}\right) + \frac{h}{RC}v_{in}(t_k) \end{aligned}$$

A tall de comparació podem estudiar també un mètode més precís com és el mètode de Runge Kutta de segon ordre, que proposa com a solució,

$$x(k+1) = x(k) + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x(k) + \frac{h}{2}f(t_k, x(k))\right)$$

Per a l'equació 18, això és,

$$\begin{aligned} v_{out}(k+1) &= v_{out}(k) + \frac{h}{RC}(-v_{out}(k) - \frac{h}{2RC}(-v_{out}(k) + v_{in}(t_k)) + v_{in}\left(t_k + \frac{h}{2}\right)) \\ v_{out}(k+1) &= v_{out}(k) \left(1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2(RC)^2}\right) + \frac{h}{RC} \left(v_{in}\left(t_k + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2RC}\right)v_{in}(t_k) \end{aligned} \quad (20)$$

Per tal de poder observar correctament la càrrega i descàrrega del condensador integrarem durant un temps corresponent diverses  $\tau$ . En concret, farem 50 passos de integració, és a dir,  $5\tau$  des de l'instant inicial  $t_0 = -1$ . Els resultats de l'algoritme numèric es poden veure en la taula 1 i gràficament en la figura 6. Tot i que les dades s'exhibeixen amb una precisió de cinc xifres, recordem que el mètode de Euler és un mètode d'ordre 1 i per tant, l'error esperat és d'ordre  $h^2$ , és a dir 0.01. El mètode RK2, en ser d'ordre 2, té un error esperat d'ordre  $h^3$ , o sigui 0.001. No ens creuríem doncs més enllà del segon decimal...

Podem observar com ambdós mètodes donen resultats similars, particularment en els primers instants de l'evolució, tot i que al final divergeixen lleugerament. Això és una conseqüència de l'acumulació de l'error a cada pas.

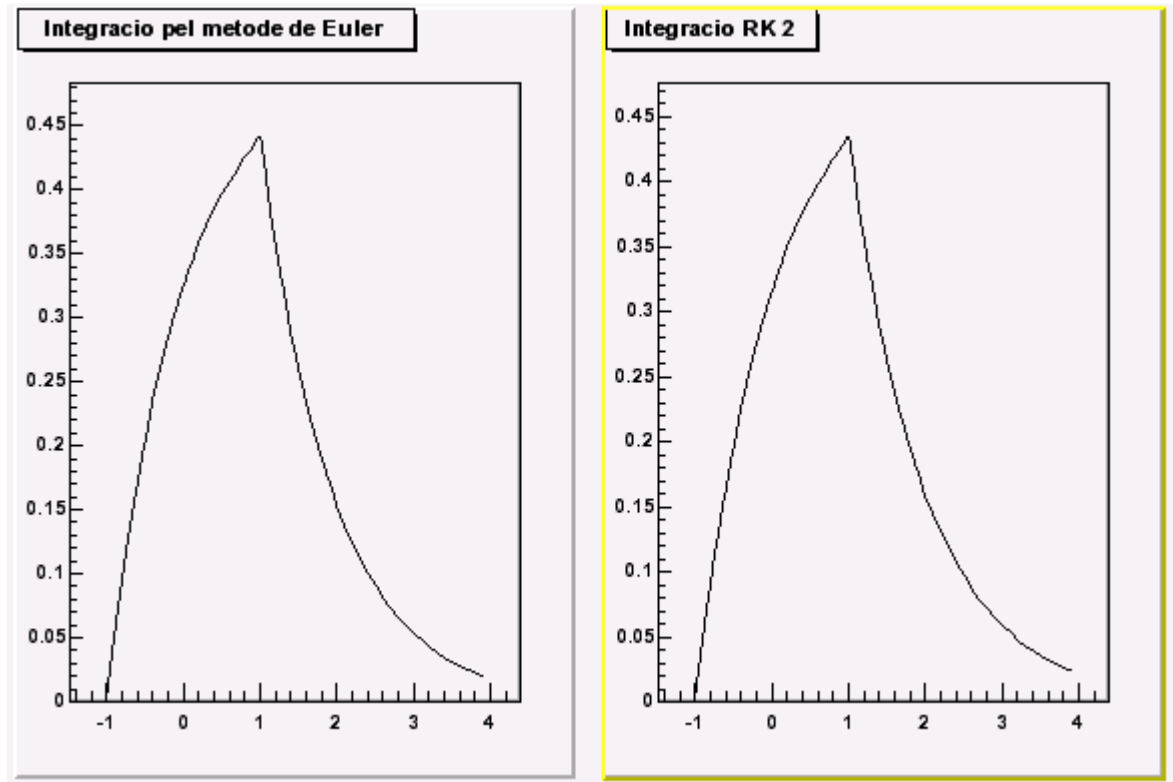


Figura 6: A l'esquerra, gràfica de  $v_{out}$  integrada pel mètode de Euler. A la dreta, gràfica de  $v_{out}$  integrada pel mètode RK2.

temps ( $\mu$ s)	$v_{out}$ (Euler)	$v_{out}$ (RK2)
-1.0	0	0
-0.9	0.05	0.0475
-0.8	0.095	0.0904875
-0.7	0.1355	0.129391
-0.6	0.17195	0.164599
-0.5	0.204755	0.196462
-0.4	0.234279	0.225298
-0.3	0.260852	0.251395
-0.2	0.284766	0.275012
-0.1	0.30629	0.296386
0.0	0.325661	0.31573
0.1	0.343095	0.333235
0.2	0.358785	0.349078
0.3	0.372907	0.363416
0.4	0.385616	0.376391
0.5	0.397054	0.388134
0.6	0.407349	0.398761
0.7	0.416614	0.408379
0.8	0.424953	0.417083
0.9	0.432457	0.42496
1.0	0.439212	0.432089
1.1	0.395291	0.39104
1.2	0.355761	0.353892
1.3	0.320185	0.320272



1.4	0.288167	0.289846
1.5	0.25935	0.262311
1.6	0.233415	0.237391
1.7	0.210074	0.214839
1.8	0.189066	0.194429
1.9	0.17016	0.175959
2.0	0.153144	0.159242
2.1	0.137829	0.144114
2.2	0.124046	0.130424
2.3	0.111642	0.118033
2.4	0.100478	0.10682
2.5	0.0904298	0.0966722
2.6	0.0813868	0.0874884
2.7	0.0732481	0.079177
2.8	0.0659233	0.0716552
2.9	0.059331	0.0648479
3.0	0.0533979	0.0586874
3.1	0.0480581	0.0531121
3.2	0.0432523	0.0480664
3.3	0.0389271	0.0435001
3.4	0.0350344	0.0393676
3.5	0.0315309	0.0356277
3.6	0.0283778	0.032243
3.7	0.02554	0.02918
3.8	0.022986	0.0264079
3.9	0.0206874	0.0238991

Taula 1: Resultats dels algorismes numèrics.

Finalment, podríem pensar que el resultat del primer problema ens podria ajudar en la resolució d'aquesta equació diferencial. En efecte, en el problema anterior hem calculat una aproximació a la transformada de Fourier del pols que introduïm en la línia de transmissió. L'equació diferencial que tenim correspon a la resposta d'un sistema lineal a una entrada. Matemàticament, podem avaluar la resposta de la línia de transmissió en el domini temporal com la convolució de la funció de resposta del sistema amb el senyal d'entrada. Si fem la transformada de Fourier, la convolució es torna un producte entre les transformades respectives. Per tant, podríem fer el producte de la transformada que hem aproximat en el problema anterior amb la funció de resposta de sistema resistència-condensador, que és un simple filtre passa-baixes. L'aproximació no ens és útil però ja que el filtre passa-baixes és sensible a freqüències en què l'aproximació no és acurada. En efecte, la freqüència d'aquesta està relacionada amb la inversa de  $\tau$  i és per tant de l'ordre del MHz. Recordem que tal com hem resolt el primer problema, l'aproximació és bona per a petits valors de  $\omega$ , però per a valors grans, la funció pes s'encarrega de suprimir les diferències. Per poder emprar una aproximació adient per resoldre el problema, caldria modificar la funció pes.

## Problema 11

---



A l'hora d'avaluar la probabilitat pel mòdul d'un senyal amb un fàding de tipus Rice, trobem la funció.

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta))$$

Interpolar la funció  $I_0(z)$  en l'interval  $[0, 2]$  amb un polinomi d'ordre 2.

## Solució

Per tal d'interpolar la funció amb un polinomi d'ordre 2, necessitarem calcular la integral en tres punts dins d'aquest interval. Evidentment, existeixen una infinitat de tries possibles, però considerarem les dues més habituals: be agafem els punts equiespaiats, amb la qual cosa, farem servir les abscisses,

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 2,$$

be emprem abscisses de Tchebitxev. En aquest cas, cal primer fer un canvi de variable que ens porti a l'interval  $[-1, 1]$ . Definim, doncs,

$$z' = z - 1$$

Les abscisses de Tchebitxev, correspondran als zeros del polinomi de Tchebitxev d'ordre 3. En general, els zeros del polinomi de Tchebitxev d'ordre  $n$  són,

$$z'_k = \cos \frac{2k + 1}{2n} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

Així, tindrem,

$$z'_0 = \cos \frac{\pi}{6}, \quad z'_1 = \cos \frac{\pi}{2}, \quad z'_2 = \cos \frac{5\pi}{6}$$

i per tant, les abscisses d'interpolació, en termes de  $z$  ens queden,

$$z_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fixem-nos que hem reordenat les abscisses per tenir-les en ordre creixent.

La funció que hem d'integrar varia molt de forma en funció del valor de  $z$ : en la gràfica podem observar l'integrand per diversos valors de la variable.

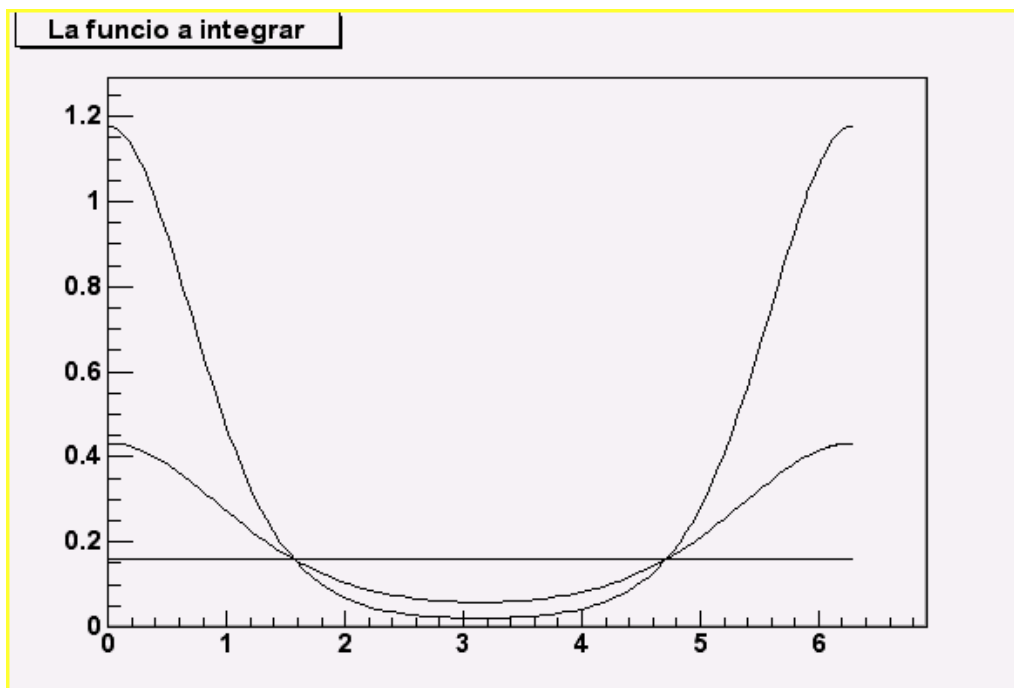


Figura 7: L'integrand pels valors  $z = 0$ ,  $z = 1$  i  $z = 2$ . Observem que la funció oscil·la més com més gran és  $z$ .

De cara a calcular la integral en els diferents punts, disposem de diverses opcions. Com que la integral és regular (no és impròpia), la podem calcular per mètodes com el del Trapezi o el de Simpson, o bé, fer servir quadratures de Gauss. De fet, tenim dues opcions per fer servir quadratures de Gauss.

La primera consisteix senzillament a realitzar un canvi de variable que ens porti l'integral a l'interval  $[-1,1]$  i tot seguit fer servir les fórmules amb les abscisses habituals, zeros del polinomi de Legendre. Seguint aquest camí, tindrem,

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) \quad (21)$$

Si definim,

$$t = \frac{\theta}{\pi} - 1 \Rightarrow \theta = \pi(t + 1)$$

ens queda,

$$I_0(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \exp(z \cos(\pi(t + 1))) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \exp(z \cos(-\pi t)) \quad (22)$$

Si ara efectuem l'aproximació,

$$I_0(z) \approx I_n^{GL}(z) = \sum_{k=0}^n \Delta_k \frac{1}{2} \exp(z \cos(-\pi t_k))$$

Per  $n=1$ , dues abscisses,



$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \Delta_0 = 1, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \Delta_1 = 1$$

ens queda,

$$I_n^{GL}(z) = \exp\left(-z \cos \frac{\sqrt{3}}{3} \pi\right) \quad (23)$$

Per  $n=2$ , tres abscisses,

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \Delta_0 = \frac{5}{9}, \quad x_1 = 0, \quad \Delta_1 = \frac{8}{9}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \Delta_2 = \frac{5}{9}$$

ens queda,

$$I_n^{GL}(z) = \frac{1}{9} \left( 4 \exp(-z) + 5 * \exp\left(-z \cos \sqrt{\frac{3}{5}} \pi\right) \right) \quad (24)$$

Una alternativa per obtenir una quadratura de Gauss consisteix a treballar una mica la integral de la manera següent:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta))$$

Ara, si fem un canvi de variable  $\theta \rightarrow \theta + \pi$  en la segona integral,

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta + \pi)), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(-z \cos(\theta)), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \exp(z \cos(\theta)) + \exp(-z \cos(\theta)) \end{aligned}$$

i arribem a

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cosh(z \cos(\theta)) \quad (25)$$

En aquesta integral podem fer el canvi de variable,

$$x = \cos\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

i obtenim

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cosh(zx) \quad (26)$$

Reconeixem immediatament l'interval i la funció pes pels quals els Polinomis de Txebitxev són ortogonals. Per tant, podem realitzar una quadratura de Gauss fent servir com a abscisses els zeros dels polinomis de Txebitxev amb les seves deltes corresponents. Consultades les taules, trobem:



$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \Delta_k = \frac{\pi}{n+1}, k = 0, 1, \dots, n. \quad (27)$$

Així, per a una quadratura amb dues abscisses, tindrem,

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Delta_0 = \Delta_1 = \frac{\pi}{2}$$

Quan ho apliquem a la fórmula 26, ens resulta,

$$I_2^{GTx} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \cosh \left( z \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \cosh \left( -z \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

i per tant,

$$I_2^{GTx} = \cosh \left( z \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (28)$$

També podem optar per una quadratura amb tres punts. Obtindrem,

$$I_3^{GTx} = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cosh \left( z \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \quad (29)$$

Finalment, podríem comparar aquests resultats amb el càlcul pels mètodes del Trapezi i de Simpson amb  $n = 10$ . Els resultats numèrics es resumeixen en la taula 2. Per tal de comparar la precisió dels diferents mètodes, s'han fet servir les abscisses  $z = 0, 1, 2$ . Les abscisses per realitzar la interpolació de Txebitxev només s'han calculat pel mètode del Trapezi.

z	$I_0(z)$	$I_2^G$	$I_3^G$	$I_2^{GTx}$	$I_3^{GTx}$	$T_{n=10}$	$S_{n=10}$
0	1	1	1	1	1	1	1
$1 - \sqrt{3}/2$						1.00449	
1	1.266066	1.27204	1.35094	1.26059	1.26602	1.26607	1.26588
$1 + \sqrt{3}/2$						2.07932	
2	2.279585	1.618070	2.59820	2.17818	2.276384	2.27959	2.27304

Taula 2: Taula dels resultats pels diferents valors de  $z$  necessaris per a realitzar les diverses interpolacions.  $I_0(z)$  correspon al valor de la funció llegit d'un llibre de taules.  $I_2^G$  és la quadratura de Gauss amb dues abscisses (Legendre).  $I_3^G$  és la quadratura de Gauss amb tres abscisses (Legendre).  $I_2^{GTx}$  és la quadratura de Gauss amb dues abscisses (Txebitxev).  $I_3^{GTx}$  és la quadratura de Gauss amb tres abscisses (Txebitxev).



$T_{n=10}$  és la integral pel mètode del Trapezi amb 10 intervals (11 abscisses). Finalment,  $S_{n=10}$  és la integral pel mètode de Simpson amb 10 intervals (11 abscisses).

Els resultats més precisos venen donats per la quadratura de Gauss amb abscisses de Txebitxev i (molt sorprenentment) pel mètode del Trapezi. Aquest es un fenomen que mereixeria un estudi més detallat.

En qualsevol cas, un cop disposem d'aquestes dades, podem passar a interpolar la funció. Per fer-ho podem emprar les dades obtingudes amb qualsevol dels mètodes. En qualsevol cas, per obtenir aquests números, emprarem els valor obtinguts pel mètode del Trapezi. Escollim el mètode de Newton per avaluar el polinomi interpolador. La fórmula general pel polinomi de segon grau és,

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Si emprem les abscisses equiespaiades, tindrem

$$p_2^{EQ}(x) = b_0^{EQ} + b_1^{EQ}x + b_2^{EQ}x(x - 1), \quad (30)$$

amb

$$b_0^{EQ} = 1, \quad b_1^{EQ} = 0.266066, \quad b_2^{EQ} = 0.373727 \quad (31)$$

Si emprem les abscisses de Txebitxev, aleshores,

$$p_2^{TX}(x) = b_0^{TX} + b_1^{TX} \left( x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + b_2^{TX} \left( x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (x - 1), \quad (32)$$

amb

$$b_0^{TX} = 1.00449, \quad b_1^{TX} = 0.302039, \quad b_2^{TX} = 0.367785 \quad (33)$$

En la gràfica 8 representem els dos polinomis interpoladors. No s'aprecien diferències substancials entre ells.

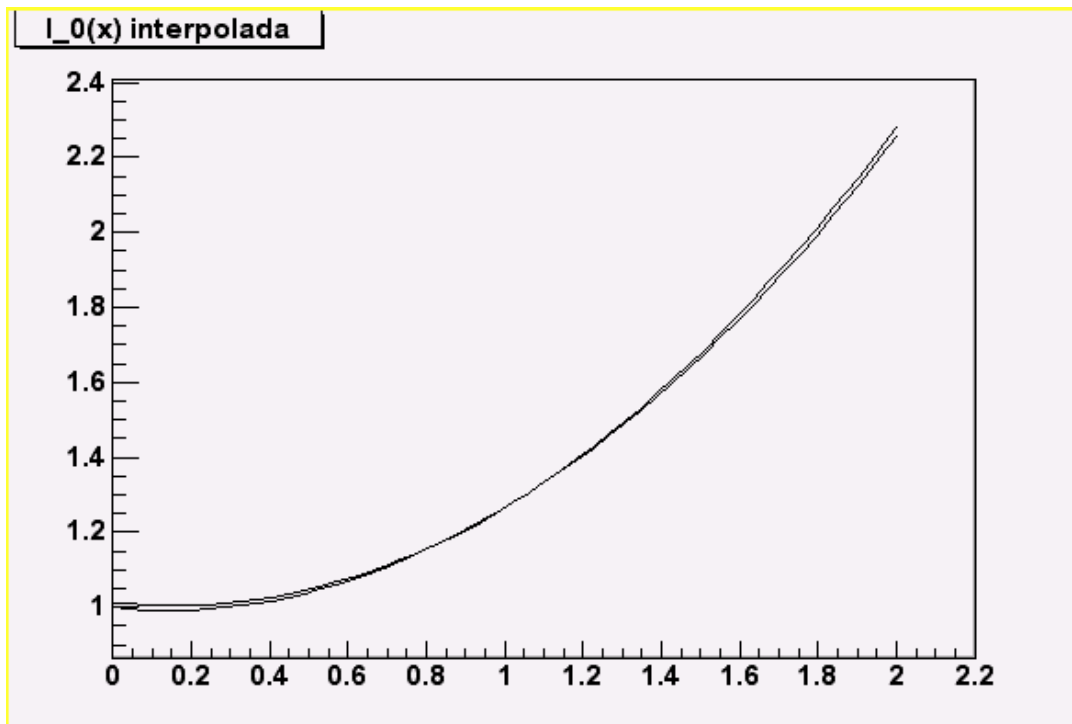


Figura 8: Els polinomis interpoladors.

Per tal de donar una idea de la qualitat de les dues aproximacions, podem comparar la funció  $I_0(z)$  avaluada en un punt. Triarem, per exemple,  $z = 0.5$ . Tenim,

$$I_0(0.5) \cong 1.063, \quad p_2^{EQ}(0.5) = 1.040, \quad p_2^{TX}(0.5) = 1.048$$

Veiem que en aquest cas, el valor obtingut amb abscisses de Txebitxev és una mica més acurat. Això, però, pot dependre del punt concret en què calculem. El que ens asseguren les abscisses de Txebitxev és que ens minimitzaran l'error màxim de interpolació.

## Problema 12

Un circuit elèctric molt sensible a la temperatura té com a funció de transferència,

$$H(t) = e^{-\frac{R_0}{L}t} (\cosh(\beta t))^{\frac{R_1}{L\beta}}, \quad t \geq 0,$$

i zero altrament. En el nostre cas, el valor dels paràmetres és

$$L = 30mH, \quad R_0 = 30\Omega, \quad R_1 = 15\Omega, \quad \beta = 1000Hz$$

Volem avaluar la transformada de Fourier d'aquesta funció de transferència,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} H(t).$$



Per a aquest objectiu, introduïm la fórmula d'Euler,  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ , en l'expressió anterior i obtenim,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos(\omega t) H(t) - j \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin(\omega t) H(t).$$

1. Avaluar la part real de la funció de transferència pels valors  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1000$  i  $\omega = 10^6$ .
2. Avaluar la part imaginària de la funció de transferència pels valors  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1000$  i  $\omega = 10^6$ .
3. Per quins d'aquests valors la integral que heu calculat és més precisa? Per què?
4. Quins valors de  $\omega$  necessitaríeu per dibuixar el diagrama de Bode?

## Solució

Volem calcular la transformada de Fourier de la funció de transferència tot separant la part real i la part imaginària. Per això, partim de la fórmula,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos(\omega t) H(t) - j \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin(\omega t) H(t).$$

Si substituïm l'expressió de  $H(t)$ , ens quedarà,

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{R_0}{L}t} \cosh(\beta t) \frac{R_1}{L\beta} \cos(\omega t) - j \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{R_0}{L}t} \cosh(\beta t) \frac{R_1}{L\beta} \sin(\omega t).$$

Fixem-nos que, com que la funció de transferència val zero per valors negatius de  $t$ , el límit inferior de la integral passa a ser zero.

Les integrals que ens apareixen, les calcularem numèricament. Com que són integrals impròpies de primera espècie i en l'integrand ens apareix una exponencial, optarem per calcular-les amb una quadratura de Gauss amb abscisses de Laguerre. Per tal que ens aparegui explícitament la funció pes  $e^{-t}$ , farem un canvi de variable,

$$\tau = \frac{R_0}{L} t, \rightarrow t = \frac{L}{R_0} \tau, \quad dt = \frac{L}{R_0} d\tau.$$

Ens queda,

$$H(\omega) = \frac{L}{R_0} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} \cosh\left(\frac{\beta L}{R_0} \tau\right) \frac{R_1}{L\beta} \cos\left(\frac{\omega L}{R_0} \tau\right) - j \frac{L}{R_0} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} \cosh\left(\frac{\beta L}{R_0} \tau\right) \frac{R_1}{L\beta} \sin\left(\frac{\omega L}{R_0} \tau\right).$$



Si ara substituïm el valor dels paràmetres del nostre problema, tenim,

$$H(\omega) = 10^{-3} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} \cosh(\tau)^{-\frac{1}{2}} \cos(10^{-3}\omega\tau) - j10^{-3} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} \cosh(\tau)^{-\frac{1}{2}} \sin(10^{-3}\omega\tau).$$

Si emprem una quadratura de Gauss amb abscisses de Laguerre, tindrem,

$$H(\omega) = 10^{-3} \sum_{k=0}^n \Delta_k \cosh(\tau_k)^{-\frac{1}{2}} (\cos(10^{-3}\omega\tau_k) - j \sin(10^{-3}\omega\tau_k))$$

D'entrada, cal que calculem aquesta expressió pels tres valors que ens demana l'enunciat. Ho fem amb una quadratura de Gauss de tres punts

$\tau_k$	$\Delta_k$
0.41577 45567	0.71109 30099
2.29428 03603	0.27851 77336
6.28994 50829	0.01038 92565

Obtenim els valors

$\omega$	ReH( $\omega$ )	ImH( $\omega$ )
0	0.806904	0
$10^3$	0.541989	0.368665
$10^6$	0.394947	0.701848

que cal multiplicar pel factor  $10^{-3}$  que hi ha davant de les integrals. Si observem les funcions que hem hagut d'integrar (en la figura 9 podem veure les funcions corresponents a la part real), per als dos primers valors de  $\omega$  són prou suaus, però per al darrer,  $\omega = 10^6$ , la funció presenta fortes oscil·lacions. Això fa que el resultat obtingut amb la quadratura de Gauss sigui poc fiable, ja que no pot recollir el detall de la funció. Si intentem fer una avaluació de la integral (sense el factor multiplicador  $10^{-3}$ ) pel mètode de Simpson, obtenim un valor de l'ordre de  $10^{-6}$ . Això vol dir que les oscil·lacions provoquen fortes cancel·lacions i fan que la integral, pràcticament s'anul·li.

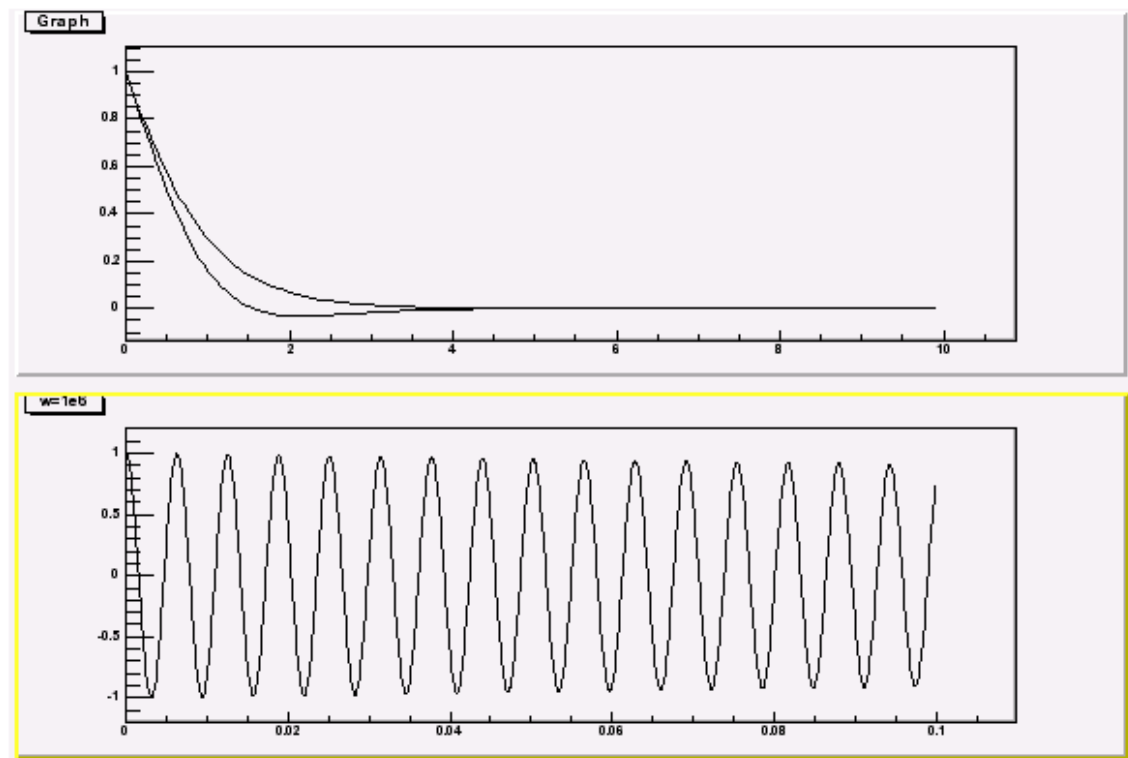


Figura 9: A dalt, les funcions a integrar per la part real de la funció de transferència per valors de  $\omega$  0 i 1000. A baix, per  $\omega = 10^6$ .

Si volguéssim calcular el diagrama de Bode d'aquesta funció de transferència, caldria avaluar la integral amb la precisió adequada. Tal com hem pogut observar amb la mostra prèvia, tècniques com les quadratures de Gauss ens poden donar bones aproximacions per valors de  $\omega$  de fins a  $10^4$  però a partir d'aquí, les oscil·lacions dels factors trigonomètrics ens obliguen a emprar d'altres mètodes. Cal ser curós amb tècniques com el Trapezi o Simpson, ja que les cancel·lacions poden posar problemes amb les precisions de les màquines. Per avaluar aquesta mena de integrals s'han desenvolupat tècniques específiques (com ara les fórmules de Filon).

## Problema 13

S'anomena factor d'*array* d'un *array* d'antenes al factor entre el mòdul del camp elèctric emès per una antena i el resultant de l'*array*,

$$E_{ARRAY} = (AF)E_{ANTENA}$$

Considerem un *array* de N antenes idèntiques com el de la figura 10. Estan separades per una distància d i alimentades per una intensitat de mateix mòdul, però desfasada,  $I_n = I_0 e^{j\beta(n-1)d}$ .

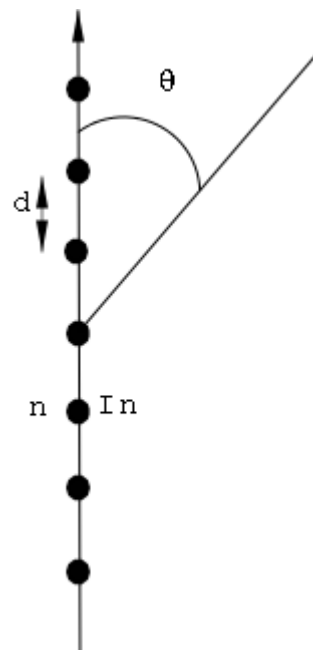


Figura 10: Esquema de l'array d'antenes.

En aquestes condicions el factor d'antena és

$$(AF) = \frac{\sin \frac{N}{2} \Psi}{\sin \frac{1}{2} \Psi}$$

on

$$\Psi = kd \cos(\theta + \beta),$$

i k és el nombre d'ona. Separem les antenes  $d = \lambda/4$ : el producte kd ens dona,

$$kd = \frac{\pi}{2}.$$

Triem  $\beta = 0$  i no desfasem les antenes. Disposem d'un array de  $N = 8$  antenes.

1. Trobar una aproximació per mínims quadrats del factor d'array en funció de l'angle  $\theta$  en termes d'un polinomi de segon grau. Discutir la tria de l'interval i de la funció pes.
2. Trobar una aproximació per mínims quadrats del factor d'array en funció del cosinus de l'angle  $\theta$ ,  $\cos \theta$ , en termes d'un polinomi de segon grau. Discutir la tria de l'interval i de la funció pes.
3. Quina de les dues aproximacions és més precisa? Per què?



## Solució

A partir de les dades dels paràmetres, si les substituïm en les expressions de l'enunciat, ens queda que la funció que cal aproximar és

$$(AF) = \frac{\sin(2\pi \cos(\theta))}{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cos(\theta)\right)}$$

Voldrem fer dues aproximacions per mínims quadrats. La primera respecte de la variable  $\theta$ , la segona respecte de  $\cos\theta$ . Sabem que l'aproximació polinòmica òptima per mínims quadrats l'obtenim tot truncant l'expansió de la funció en termes de polinomis ortogonals. Així, la nostra fórmula serà

$$(AF)(t) \approx \alpha_0 P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) + \alpha_2 P_2(t),$$

amb

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 dt (AF)(t) P_k(t),$$

i  $P_k(t)$  són els polinomis de Legendre. D'entrada, i a falta de cap altre criteri per donar més valor a un o un altre rang, hem triat com a funció pes  $w(t) = 1$ . Amb aquesta funció pes, la família de polinomis ortogonals que hem treballat, els polinomis de Legendre, s'inscriu en l'interval  $[-1,1]$ . Per això, caldrà fer un canvi de variable en la funció que volem aproximar per tal de portar la variable a aquest interval.

Atès que el problema presenta simetria axial respecte de l'eix de l'array d'antenes, els valors rellevants de la variable  $\theta$  oscil·len entre 0 i  $\pi$ . Per això definirem una nova variable  $t$ ,

$$t = \frac{2}{\pi} \theta - 1, \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} (t + 1)$$

La nova variable  $t$ , efectivament, pren valors en l'interval requerit  $[-1,1]$ . Així, aproximarem el factor d'array en termes de la nova variable segons l'expressió

$$(AF)(t) = \frac{\sin\left(2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)\right)}$$

Tenint en compte que  $\cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ , podem simplificar l'expressió anterior i obtenir,

$$(AF)(t) = \frac{\sin\left(2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}$$



D'aquesta manera, els coeficients  $\alpha_k$  de l'expansió en polinomis de Legendre els calcularem amb les integrals

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 dt P_k(t) \frac{\sin\left(2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}$$

Recordem que els tres primers polinomis de Legendre (que ens donaran l'aproximació fins a segon grau) són,

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

Observem que tenen paritat definida, és a dir que  $P_0(t)$  i  $P_2(t)$  són parells, mentre que  $P_1(t)$  és senar. Observem que  $(AF)(t)$  és una funció parella. Així, la integral que ens dóna el coeficient  $\alpha_1$  s'anul·larà, ja que correspon a la integral d'una funció senar en un domini simètric respecte de l'origen.

Passem a calcular les integrals. Ho podem fer mitjançant quadratures de Gauss, però el fet que la funció a integrar oscil·li i que, a més, l'integrand involucri polinomis de Legendre fa que el resultat sigui poc fiable. Això ho podem comprovar tot comparant amb el mètode del Trapezi per 10 intervals. Els resultats que obtenim es resumeixen en la taula següent.

Mètode	$\alpha_0$	$\alpha_2$
Quadratura de Gauss 3 punts	3.24137	-9.51726
Trapezi 10 intervals	0.937161	-3.66829

L'aproximació obtinguda la definirem doncs a partir d'aquests paràmetres,

$$(AF)(t) \approx \alpha_0 + \alpha_2 P_2(t),$$

o bé, en termes de  $\theta$ ,

$$(AF)(\theta) \approx \alpha_0 + \alpha_2 P_2\left(\frac{2}{\pi}\theta - 1\right)$$

Si plantegem l'aproximació en termes de la variable  $x = \cos\theta$ , aleshores la funció a aproximar és

$$(AF)(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$$

En aquestes circumstàncies, la variable  $x$  ja es troba, naturalment, en l'interval  $[-1,1]$ . D'altra banda, si triem com a funció pes  $w(x) = 1$ , a falta d'un altre criteri, de nou tindrem una aproximació en termes de polinomis de Legendre. Ara, però, els coeficients de l'aproximació,

$$(AF)(x) \approx \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x)$$



els dóna la integral,

$$\beta_k = \frac{2k + 1}{2} \int_{-1}^1 dt P_k(t) \frac{\sin(2\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} x\right)}$$

De nou, observem que la funció que s'ha d'integrar és parella i per tant, el coeficient  $\beta_1$  s'anul·larà directament. De nou procedim a calcular les integrals, tant amb una quadratura de Gauss de tres punts com pel Trapezi amb 10 intervals amb les mateixes precaucions que en cas anterior. Els resultats els resumim de nou en una taula.

Mètode	$\beta_0$	$\beta_2$
Quadratura de Gauss 3 punts	2.59509	-10.8098
Trapezi 10 intervals	1.81379	-5.96565

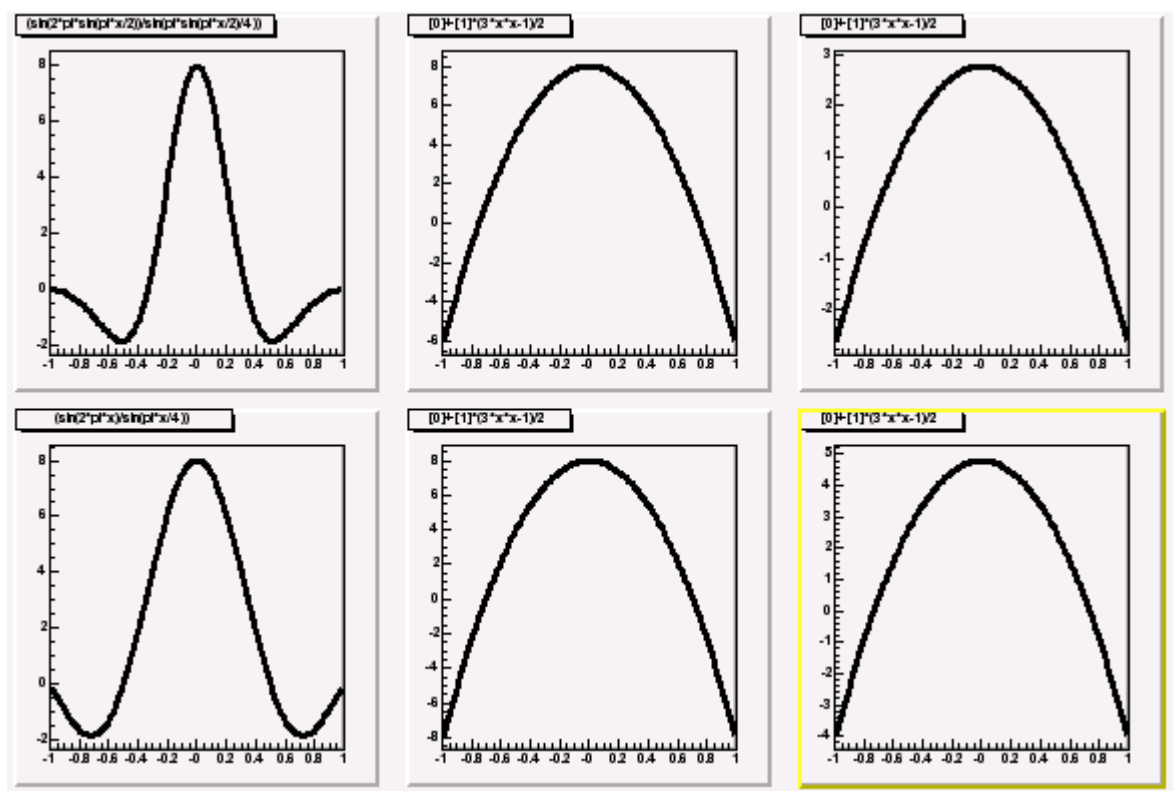


Figura 11: Les funcions i llurs aproximacions. A dalt, en funció de t, amb els coeficients obtinguts per quadratura de Gauss (al mig) i Trapezis (a la dreta). A baix, en funció de  $x = \cos \theta$ .

En la figura 11 podem observar les funcions que volem aproximar i les respectives aproximacions donades pels coeficients calculats per tots dos mètodes. Clarament observem que es tracta de funcions parelles i amb oscil·lacions que provocaran cancel·lacions entre termes positius i negatius en la integral.

Respecte de la precisió d'aquestes aproximacions, podem afirmar que les dues són vàlides fins a polinomis de grau 3. En efecte, si afegíssim un nou terme a l'expansió en polinomis de Legendre, el de grau 3, a causa de la paritat d'aquest, el seu coeficient s'anul·larà de la mateixa manera que ho ha fet el coeficient del polinomi d'ordre 1. De



tota manera, i observant les gràfiques, no podem afirmar que l'aproximació sigui gaire bona. A partir d'aquí, l'avaluació de la precisió cal fer-la en termes del tipus de càlcul que vulguem abordar.

Tal com l'hem plantejat, l'expansió en termes de la variable  $t$  pesa amb igual pes tots el valors de l'angle: per entendre'ns és com si féssim un mostreig regular del angles. Per altra banda, l'expansió en la variable  $x$  ho fa amb tots els valors del  $\cos\theta$ , és a dir amb les projeccions sobre l'eix de l'array d'antenes. Això vol dir que si hem d'abordar algun càlcul respecte de l'angle serà millor la primera aproximació, mentre que si ho volem respecte de l'eix de l'array, és millor la segona.

Per tal d'obtenir una aproximació en termes del  $\cos\theta$  que pesés d'igual manera tots els angles, caldria introduir una funció pes que compensés els efectes distorsionadors del cosinus. Aquesta funció pes seria

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

que donaria lloc, precisament, a una expansió en termes de Polinomis de Txebitxev.

## Problema 14

Considerar la integral

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin(z \sin\theta)$$

Quant val la correcció del primer terme de la sèrie de Euler-Mc Laurin al càlcul de la integral pel mètode del Trapezi amb  $h = \pi/4$  ?

## Solució

Si tenim una integral

$$I = \int_{x_0}^{x_n} dx f(x),$$

la fórmula d'Euler-McLaurin que dona la correcció a l'aproximació pel mètode dels Trapezis és

$$R = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{2k+2} (f^{(2k+1)}(x_n) - f^{(2k+1)}(x_0)),$$

sent  $B_j$  els números de Bernouilli i  $h$  el pas de integració. El primer terme d'aquesta sèrie és doncs

$$S_1 = \frac{B_2}{2} h^2 (f'(x_n) - f'(x_0)).$$



Per una banda, sabem que  $B_2 = 1/6$ . Per l'altra, en la nostra integral,  $h = \pi/4$ . La funció a integrar és

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin(z \sin \vartheta)$$

i per tant,

$$f'(x) = -\frac{1}{\pi} z \cos \vartheta \cos(z \sin \vartheta).$$

Tenim, doncs,

$$f'(\pi) = \frac{z}{\pi}, \quad f'(0) = -\frac{z}{\pi},$$

i finalment,

$$S_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 2 \frac{z}{\pi} = \frac{\pi z}{96}.$$

Idènticament, demostrar que per

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta \cos(z \sin \vartheta),$$

la primera correcció val

$$S_1 = 0.$$

## Problema 15

Sigui la integral

$$\int_0^\infty dx e^{-x} \left( \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right).$$

Quant val la quadratura de Gauss de dos punts ?

## Solució

Atès que els límits d'integració són 0 i  $\infty$  i que, a més, observem la presència de la funció  $e^{-x}$  en l'integrand, realitzarem la quadratura de Gauss amb els zeros dels polinomis de Laguerre i les seves deltes corresponents. Així,

$$I = \int_0^\infty dx e^{-x} \left( \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right) \cong I_2^G,$$

on

$$I_2^G = \Delta_0 \left( \frac{x_0^2}{2} - 2x_0 + 1 \right) + \Delta_1 \left( \frac{x_1^2}{2} - 2x_1 + 1 \right),$$



amb

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.5857864376, \\x_1 &= 3.4142135624, \\ \Delta_0 &= 0.8535533906, \\ \Delta_1 &= 0.1464466094.\end{aligned}$$

Casualment, observem a l'hora de calcular que l'acció del polinomi sobre  $x_0$  i  $x_1$  dóna aproximadament zero. Això és perquè el polinomi és múltiple del polinomi de Laguerre  $L_2(x)$ ,

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2 = 2 \left( \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right).$$

Per això, aquesta aproximació ens dóna zero. Si fem l'aproximació amb més punts, el resultat serà diferent de zero.

Idènticament, comprovar que per :

$$I = \int_0^{\infty} dx e^{-x}(x^2 + 4x + 2),$$

tenim

$$I \cong I_2^G = 8.$$

## Problema 16

Sigui un canal binari on es transmet un 1 amb probabilitat  $p$  i un zero amb probabilitat  $(1 - p)$ . Estadísticament, avaluem  $p$  amb un error  $\epsilon_p$ . Quant val propagació lineal de l'error sobre l'entropia del canal,

$$S = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)?$$

## Solució

La fórmula de la propagació lineal de l'error ens diu que

$$\epsilon_S = \left| \frac{dS}{dp} \right| \epsilon_p.$$

Si calculem, la derivada, obtenim,

$$\frac{dS}{dp} = \ln \left( \frac{p-1}{p} \right).$$

Finalment ens queda,

$$\epsilon_S = \left| \ln \left( \frac{p-1}{p} \right) \right| \epsilon_p.$$



## Problema 17

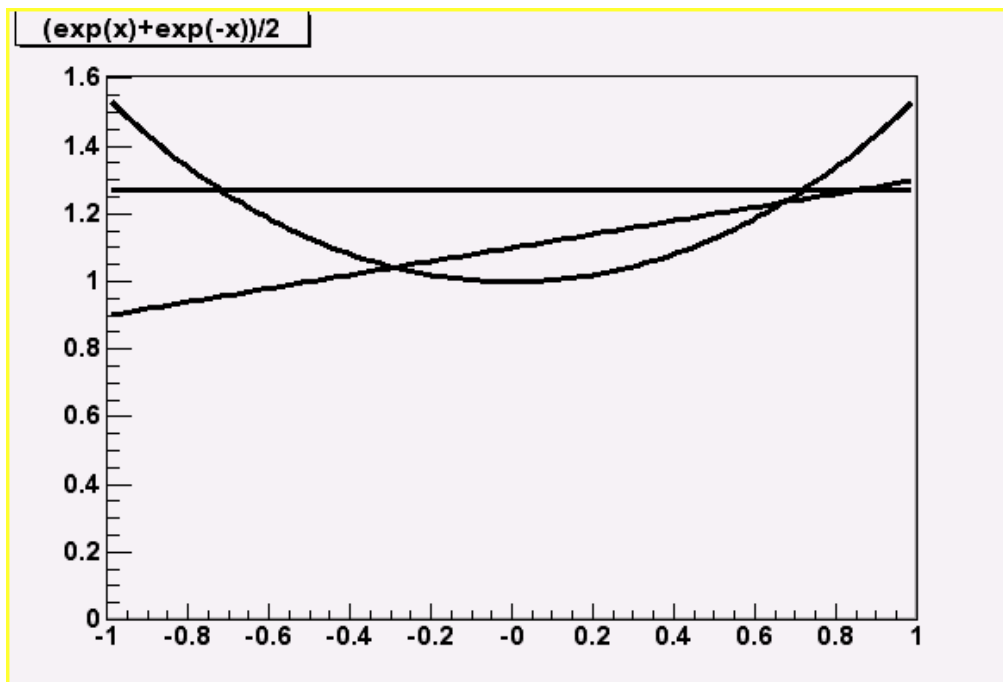
Aproximem amb el criteri de la norma infinita el cosinus hiperbòlic

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

en l'interval  $[-1, 1]$ , per una recta  $ax + b$ . Trobar els coeficients  $a$  i  $b$ .

## Solució

En aquest interval, tal com es pot apreciar en la figura, el cosinus hiperbòlic no és una funció monòtona.



Caldrà doncs deduir específicament una solució pel problema. D'entrada, si pintem una recta que talli la funció, podem observar que hi ha tres punts candidats a tenir el màxim error,  $-1$ ,  $1$  i  $0$ . Per tal d'equilibrar el valor de l'error en aquests tres punts, ens caldrà d'entrada que el pendent de la recta sigui  $0$ . Així, assegurarem que els punts  $-1$  i  $1$  tindran el mateix error.

D'altra banda, com que la funció val el mateix, per simetria en  $-1$  i en  $1$ , cal situar la recta constant entremig dels valors de  $0$  i de  $1$ . Això és,

$$b = \cosh(0) + \frac{1}{2}(\cosh(1) - \cosh(0))$$

Ens queda,

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^1 + e^{-1}).$$



## Problema 18

L'equació que governa l'aturada d'un motor de corrent continu al qual no s'aplica cap tensió és

$$\frac{d\omega}{dt} = -0.65\omega,$$

en què  $\omega$  és la velocitat angular del motor. Integrem aquesta equació diferencial pel mètode d'Euler amb una condició inicial  $\omega(0) = 3$ . Quin dels següents valors de  $h$  és el més gran que permet calcular  $\omega$  amb una precisió de 0.05 en  $t = 1s$ ?

## Solució

Aquest problema és idèntic a un dels problemes de resolts de la col·lecció: només cal substituir el valor de la constant del problema per 0.65. Si es repeteixen els passos de la solució, cal trobar que la precisió requerida s'assoleix fent 7 passos. Amb 5 passos no hem arribat encara a l'error demanat i amb 10 el complim amplament.

Per

$$\frac{d\omega}{dt} = -0.95\omega,$$

la precisió mínima s'assoleix fent 11 passos.

## Problema 19

Volem fer l'aproximació per mínims quadrats del sinus hiperbòlic,

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

en l'interval  $[-1, 1]$  amb funció pes  $w(x) = 1$ , per una recta  $ax + b$ . Descomposem  $ax + b$  com a suma de dos polinomis de Legendre,

$$ax + b = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x)$$

Quant valen els coeficients  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$ ?

## Solució

D'entrada, recordem que els dos primers polinomis de Legendre són,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Els coeficients de l'aproximació per mínims quadrats sabem que s'obtenen projectant la funció sobre el polinomi ortogonal, en altres paraules, fent-ne el producte escalar convenientment normalitzat,



$$\alpha_i = \frac{2i + 1}{2} \int_{-1}^1 dx \sinh x P_i(x).$$

A nosaltres ens interessien els dos primers.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \sinh x P_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \sinh x.$$

Com que el sinus hiperbòlic és senar, aquesta integral s'anul·la.

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 dx \sinh x P_1(x) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 dx x \sinh x.$$

Tot fent servir que l'integrand és ara una funció parella, tenim que

$$\alpha_1 = 3 \int_0^1 dx x \sinh x.$$

Aquesta integral la podem avaluar per parts i obtenim,

$$\alpha_1 = 3e^{-1}.$$

Resumint, tenim,

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 3e^{-1} \cong 1.1.$$

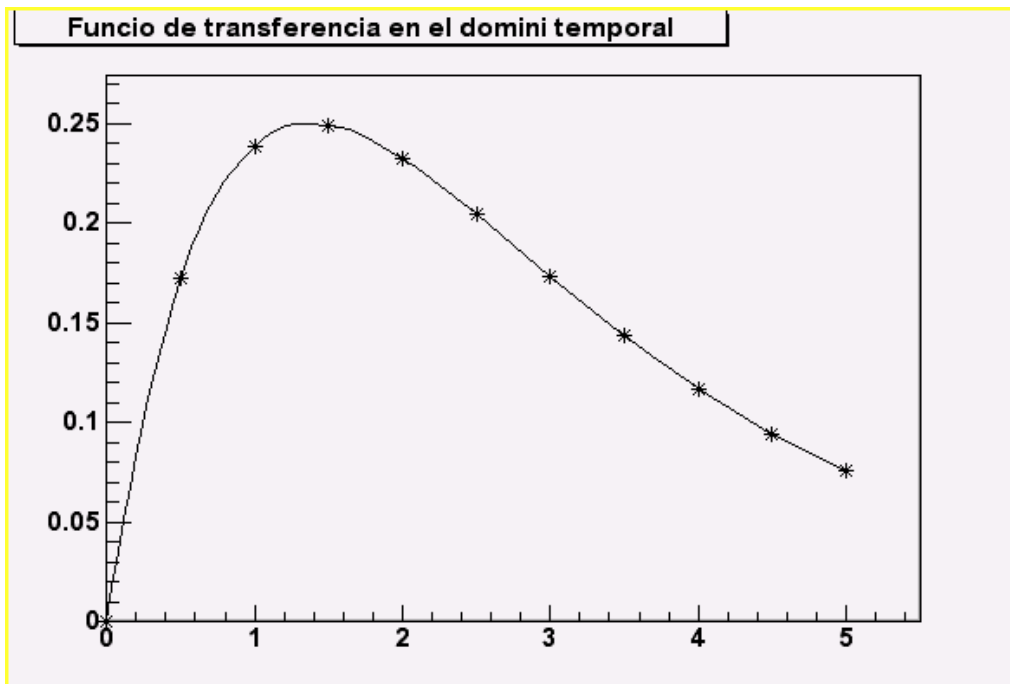
Si aproximem ara el cosinus hiperbòlic, trobarem que

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \cong 1.2, \quad \alpha_1 = 0.$$

## Problema 20

Mostregem la resposta impulsional  $h(t)$  d'una línia de transmissió que suposem lineal, invariant en el temps. El període de mostreig és  $T = 0.5s$ . Obtenim les dades següents.

t	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
h(t)	0.000	0.172	0.239	0.249	0.233	0.204	0.173	0.144	0.117	0.094	0.075



Suposem que aquest sistema no te zeros i és de segon ordre. Per això volem intentar interpolar

$$\frac{1}{h(s)}$$

amb un polinomi de grau 3, on  $h(s)$  és la transformada de Laplace de  $h(t)$ ,

$$h(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} h(t).$$

- Suposem que  $h(t)$  és positiva i que tendeix a zero quan  $t \rightarrow \infty$ . Si acotem  $h(t) < 0.075$  per  $t > 5$ , trobar l'error màxim que es comet aproximant  $h(s)$  per

$$\int_0^5 dt e^{-st} h(t).$$

- Triar raonadament les abscisses d'interpolació  $s_i$ .
- Calcular les integrals  $h(s_i)$ .
- Interpolar  $1/h(s_i)$ .
- Avaluar l'error de la precisió de les dades sobre el càlcul de les integrals i els coeficients del polinomi interpolador.



## Solució

Volem avaluar la transformada de Laplace

$$h(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} h(t),$$

d'una funció mostrejada,  $h(t)$ , de la qual en tenim valors fins a  $t = 5.0$ . Això comporta que haurem d'aproximar les integrals que realitzem per

$$h(s) \cong \int_0^5 dt e^{-st} h(t),$$

i, per això, estarem cometent un error

$$E(s) = \int_5^{\infty} dt e^{-st} h(t),$$

Tot observant la figura, i a partir de les suposicions del problema, podem dir que, en qualsevol cas, per  $t > 5.0$

$$0 < h(t) < h(0.5) = 0.075.$$

Podem traslladar aquesta cota al càlcul de la integral i afitar el valor de  $E(s)$ . Per una banda, i com que l'integrand és positiu, sabem que  $E(s) > 0$ . Per l'altra,

$$E(s) = \int_5^{\infty} dt e^{-st} h(t), < 0.075 \int_5^{\infty} dt e^{-st}, < 0.075 \left[ -\frac{1}{s} e^{-5s} \right]_5^{\infty}, < \frac{0.075}{s} e^{-5s} = \epsilon(s).$$

Fixem-nos que quan  $s \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon(s) \rightarrow 0$ , però també que quan  $s \rightarrow 0$ ,  $\epsilon(s) \rightarrow \infty$ . Com que haurem de treballar amb valors petits de  $s$ , l'error comés pot ser gran. Podem fer una estimació ràpida dels valors de  $\epsilon(s)$ . Això ens pot ajudar a trobar els valors de  $s$  amb els quals hem de treballar. En efecte, tenim,

s	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0
$\epsilon(s)$	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$

D'aquesta taula podem veure que, a partir de  $s = 1$ , la cota de l'error serà més petita que l'error de precisió de qualsevol de les dades  $h(t)$ , que és  $1 \cdot 10^{-3}$ . Això ens fixa, per sota, el rang dels valors de  $s$  on triar les abscisses d'interpolació.

El límit superior ens el fixa la freqüència de mostreig,  $f_m = 2\text{Hz}$ . Qualsevol informació sobre el contingut freqüencial de  $h(t)$  a freqüències més altes ha desaparegut i per tant, no te sentit físic triar  $s$  massa grans. De fet, el teorema de Nyquist ens diu que la freqüència més alta de què tindrem informació és la meitat de la freqüència de mostreig, és a dir 1Hz. Com que  $s$  està relacionat amb les freqüències angulars, això ens dona un límit superior

$$s_{max} \approx 2\pi \cdot 1 \approx 6.$$



Per fer una interpolació amb un polinomi de grau 3, ens caldran 4 abscisses, dins del rang  $s \in [1,6]$ . Per una banda, com més petites, més acurada és la informació proporcionada pel mostreig de  $h(s)$ , però com més grans, més petit és  $\epsilon(s)$ . Sota aquests criteris, hi ha una infinitat de tries possibles, des d'equiespaiades entre, per exemple, 1 i 3 fins a distribuïdes segon les abscisses de Txebitxev en el mateix interval. De fet, si suposem que el sistema és de segon ordre sense zeros,  $1/h(s)$  hauria de ser un polinomi de segon grau i per tant, qualsevol tria d'abscisses hauria de donar el mateix resultat.

Per simplicitat, triarem les abscisses equiespaiades, a partir de  $s = 1$ . Ho farem amb dos passos 0.5 i 1 i en compararem els resultats.

A l'hora de calcular les integrals, ho podem fer pels mètodes del Trapezi o de Simpson. D'entrada, veiem que, en ambdós casos, l'error procedent de la precisió de les dades serà el mateix per ambdós mètodes. En efecte, si sabem els valors d'una funció amb precisió  $\epsilon$  i calculem una integral pel mètode del Trapezi,

$$I_T = h \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right),$$

la propagació lineal de l'error, ens dona que

$$\epsilon_T = h \left( \frac{1}{2} \epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon \right) = nh\epsilon = (x_n - x_0)\epsilon.$$

Evidentment, estarem menyspreant l'error numèric en  $h$ .

Suposem que les  $t$  no tenen error. Per tant,  $h$  no acumula error i a més, podrem calcular les exponencials amb prou precisió com perquè l'error dominant sigui el de les  $h(t)$ . De la taula de dades, i manca de més informació, estimem l'error de les  $h(t)$  en  $10^{-3}$ . Així, quan calculem l'error induït sobre les integrals, trobem que

$$\epsilon_T = 5.0 \cdot 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Aquest error és superior al que tenim pel fet de truncar les integrals en  $t = 5$ , pels valors de  $s$  triats.

A l'hora de decidir si calculem les integrals pel Trapezi o per Simpson, estudiarem quin és l'error induït pel mètode. Per tal de trobar-ne una estimació, calcularem per  $s = 1$ . Per a aquest objectiu, avaluarem les integrals, amb un cert nombre d'interval, i amb el doble. En efecte, sabem que, pel Trapezi,

$$I = I_n + ah^2, \quad I = I_{2n} + a \left( \frac{h}{2} \right)^2.$$

Aïllant i restant, obtenim, que l'error del mètode sobre la integral amb  $2n$  punts és

$$\frac{1}{4} ah^2 = \frac{1}{3} (I_{2n} - I_n).$$

Per Simpson, tindrem



$$I = I_n + ah^4, \quad I = I_{2n} + a\left(\frac{h}{2}\right)^4.$$

Aïllant i restant, obtenim, que l'error del mètode sobre la integral amb  $2n$  punts és

$$\frac{1}{16}ah^4 = \frac{1}{15}(I_{2n} - I_n).$$

Si calculem  $h(1)$  pel Trapezi, amb  $n = 5$  i  $n = 10$ , trobem

$$I_{10} \cong 0.1562, \quad I_5 \cong 0.1300, \quad \frac{1}{4}ah^2 \cong 0.0087.$$

Per Simpson,

$$I_{10} \cong 0.1649, \quad I_5 \cong 0.1511, \quad \frac{1}{16}ah^4 \cong 0.0009.$$

En el cas del Trapezi, l'error del mètode és superior a l'error de la precisió de les dades. Per això triarem Simpson per fer les nostres integrals i mantenir l'error de precisió de les dades com a dominant.

Avaluem ara la resta d'integrals. Recordem que, per calcular-les, hem d'avaluar els integrands, és a dir,

$$h(s) \cong \frac{h}{3}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n),$$

on

$$y_i = e^{-st_i}h(t_i).$$

Realitzem els càlculs per diferents valors de  $s$  i obtenim la taula següent.

$s$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$h(s)$	0.165	0.098	0.064	0.044	0.032	0.023	0.017	0.013	0.010	0.008	0.006
$1/h(s)$	6.06	10.2	15.7	22.6	31.5	42.9	57.3	75.8	99.4	130.	168.
$\varepsilon_{1/h(s)}$	0.18	0.52	1.2	2.6	5.0	9.2	16.	29.	49.	84.	142.

Hem avaluat també l'error en el càlcul de  $1/h(s)$  a partir de la fórmula de propagació lineal de l'error,

$$\varepsilon_{1/x} = \frac{\varepsilon_x}{x^2},$$

tot considerant que l'error sobre les  $h(s)$  és el procedent de la precisió de les dades,  $5 \cdot 10^{-5}$ . Observem com l'error relatiu creix pels valors més grans de  $s$ .

Ara, ens toca interpolar. Interpolarem pel mètode de Newton, amb la nomenclatura habitual,



$$p_3(s) = b_0 + b_1(s - s_0) + b_2(s - s_0)(s - s_1) + b_3(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2).$$

Els coeficients  $b_i$  els trobarem tot fent les diferències dividides.

Si triem els quatre primers valors de  $s$ ,

$$1, 1.5, 2, 2.5,$$

pels quals l'error relatiu de  $1/h(s)$  és més petit, obtenim,

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
6.06	8.30	2.58	0.34

Si triem uns altres valors de  $s$ , com,

$$1, 2, 3, 4,$$

obtenim

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
6.06	9.59	3.14	0.60

Veiem que els resultats són relativament semblants.

Observem que la hipòtesi que el sistema podria ser de segon ordre, i per tant, que  $h(s)$  hauria de ser un polinomi de grau 2 és relativament compatible amb els resultats. En efecte, el coeficient  $b_3$  és un ordre de magnitud més petit que els altres.

Evidentment, cal confirmar aquest fet fent una ràpida estimació dels errors, si més no per a la primera tria de valors. Recordem que les diferències dividides es calculen, com el seu nom indica, fent una diferència dels valors de la funció i després dividint per una diferència d'abscisses. Si suposem que no tenim error en les abscisses, tot l'error vindrà dels numeradors. Així per exemple, si agafem

$$b_1 = \frac{1/h(1.5) - 1/h(1)}{0.5},$$

la propagació lineal de l'error ens diu que

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{1/h(1.5)} + \varepsilon_{1/h(1)}}{0.5} \approx 1.2.$$

Si procedim així per la resta dels coeficients, podem trobar que

$$\varepsilon_2 \approx 4.6, \quad \varepsilon_3 \approx 8.$$

Amb aquest error, el valor petit trobat per  $b_3$  podria ben be ser compatible amb zero.





## Bibliografia

---

### LLIBRES

---

#### **Eines bàsiques de càlcul numèric**

Aubanell, Anton; Benseny, Antoni; Delshams, Amadeu  
Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona  
Bellaterra, 1991  
[Aubanell1991]

#### **Càlcul numèric**

Bonet, Carles; Jorba, Àngel; Martínez-Seara, M.Teresa; Masdemont, Joaquim; Ollé, Mercè; Susin, Antoni; València, Marta  
Edicions UPC  
Barcelona, 1994  
[Bonet1994]

#### **Numerical recipes in C**

Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T.; Flannery, Brian P.  
Cambridge University Press  
Melbourne, 1997  
[Press1997]

### APUNTS

---

#### **Problemes de Mètodes Numèrics**

Martorell, Josep Ma.; Sancho, Teresa  
EALS  
Barcelona, 2001  
[Martorell2001c]



## Glossari

### **Error absolut**

Diferència entre el valor exacte i l'aproximat d'una certa magnitud.

### **Error relatiu**

Quocient entre l'error absolut d'una magnitud i el seu valor.

### **Interpolació**

Procediment pel qual es construeix una funció (funció interpoladora) que passa per un conjunt de punts que pertanyen a una altra funció (aquella que es vol interpolar).

### **Aproximació**

Opció que consisteix a construir una funció que n'aproximi una altra tot minimitzant una certa funció error, que pot ser definida a partir de diferents normes (norma euclidiana, norma del màxim,...).

### **Diferències dividides**

Quantitats que es calculen a partir de quocients de diferències (d'aquí el seu nom), definides de forma recursiva i utilitzades en mètodes d'interpolació.

### **Fenomen de Runge**

Efecte propi dels polinomis interpoladors, que consisteix en el fet que aquests polinomis aproximen molt malament la funció que s'ha d'interpoliar fora dels punts utilitzats per construir-lo (abscisses d'interpolació).

### **Pes, funció pes**

Funció de recorregut positiu per la qual estan ben definides totes les integrals dels seus moments (integrals del producte amb potències de la variable). S'utilitzen per donar més o menys importància a una certa zona de l'interval en problemes d'interpolació, aproximació, integració numèrica,...

### **Norma**

La norma d'un element és l'arrel quadrada del producte escalar d'aquest element per ell mateix. En l'espai euclidià ens referim a la norma també com mòdul o distància.

### **Delta de Kronecker**

Distribució de dos índex que val la unitat si els dos índex són iguals, i zero en qualsevol altre cas.

### **Polinomi mònic**

Polinomi que té el terme de grau més alt amb coeficient unitari.

### **Polinomis ortogonals, Ortogonals**

Polinomis amb producte escalar nul, tenint en compte que el producte escalar és la integral del seu producte, en l'interval del problema.



### **Subintervals**

Intervals en què es divideix un altre interval més gran. Si les divisions són fetes de forma equiespaiada, tots ells tenen la mateixa longitud.

### **Pas**

Representat generalment per la lletra  $h$ , longitud d'un subinterval. Apareix en tots aquells mètodes en què es divideix un interval de treball en d'altres de més petits.

### **Residu**

Error en un mètode aproximat.

### **Singularitat**

Una funció té una singularitat en un punt si en aquest no està ben definida, ja sigui per una discontinuïtat evitable, una asímptota vertical, etc.

### **Ordre, Ordre global**

Es refereix a un mètode d'un pas per resoldre equacions diferencials ordinàries, dona una mesura de l'exactitud del mètode numèric.